др Владимир Балтић

baltic@viser.edu.rs

Комплексни бројеви

Инжењерска математика

https://lectio2.viser.edu.rs

шифра: INZ2018

$\mathbb{N}$ *скуп природних бројева*:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}.$$

$\mathbb{N}$ *скуп природних бројева*:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}.$$

$\mathbb{Z}$ *скуп целих бројева*:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

$\mathbb{N}$ *скуп природних бројева*:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}.$$

$\mathbb{Z}$ *скуп целих бројева*:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

$\mathbb{Q}$ *скуп рационалних бројева*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathbb{I}$ *скуп ирационалних бројева*:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\ldots,$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415058\ldots,$$

$$e = 2,7182818284590452353602874713527\ldots,$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795\ldots$$

$\mathbb{I}$ *скуп ирационалних бројева*:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242 09\ldots,$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415 05\ldots,$$

$$e = 2,7182818284590452353602874713 52\ldots,$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832 79\ldots$$

И неки рационални бројеви имају ∞ децималне записе, али су они периоднични:

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857142857142857 1\ldots$$

$$= 0,(142857)$$

сви ирационални бројеви имају ∞ децималне записе који нису периоднични.

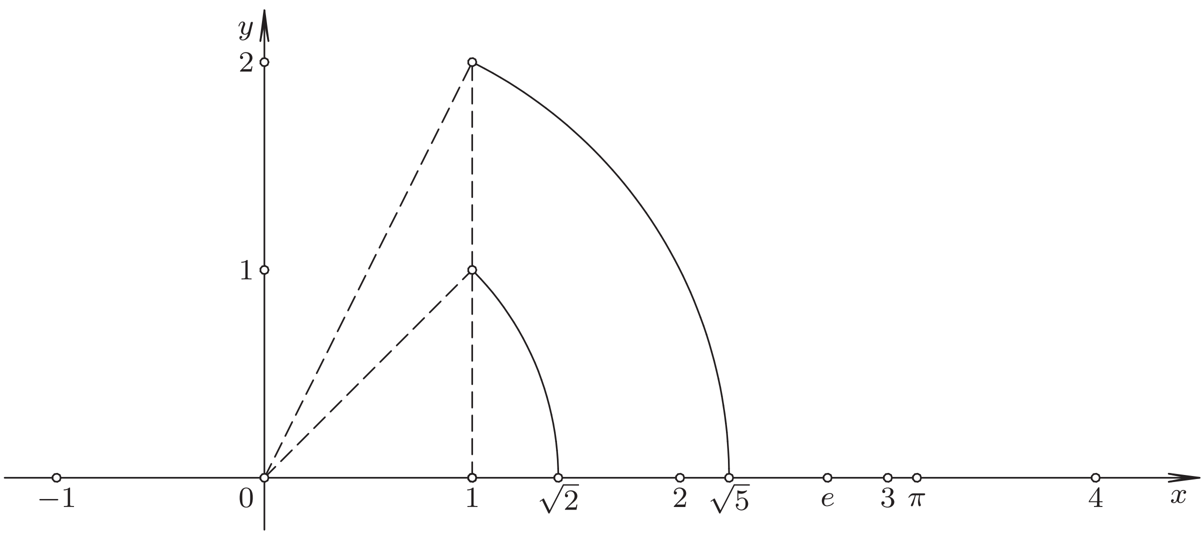
$\mathbb{R}$ *скуп реалних бројева*:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$\mathbb{R}$ *скуп реалних бројева*:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

можемо замишљати као реалну праву, где сваком реалном броју одговара 1 тачка са праве и обрнуто:



У $\mathbb{R}$ нема свака једначина $P(x) = 0$ решења, где је $P(x)$ неки полином.

У $\mathbb{R}$ нема свака једначина $P(x) = 0$ решења, где је $P(x)$ неки полином.
Једначина

$$x^2 = -1$$

нема решења јер је $x^2 \geqslant 0$, а $-1 < 0$.

У $\mathbb{R}$ нема свака једначина $P(x) = 0$ решења, где је $P(x)$ неки полином.
Једначина
$$x^2 = -1$$
нема решења јер је $x^2 \geqslant 0$, а $-1 < 0$.

Уведимо појам *имагинарне јединице* i:
$$i^2 = -1$$

У $\mathbb{R}$ нема свака једначина $P(x) = 0$ решења, где је $P(x)$ неки полином.
Једначина

$$x^2 = -1$$

нема решења јер је $x^2 \geqslant 0$, а $-1 < 0$.

Уведимо појам *имагинарне јединице* i:

$$i^2 = -1$$

$\mathbb{C}$ *скуп комплексних бројева*:

$$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Комплексни бројеви су бројеви облика

$$z = a + b \cdot i,$$

при чему су $a, b \in \mathbb{R}$.
Број a је *реалан део* комплексног броја z,
број b је *имагинаран део* (не $b \cdot i$!).

Ознаке су: $\mathcal{R}e\ z = a$ и $\mathcal{I}m\ z = b$.

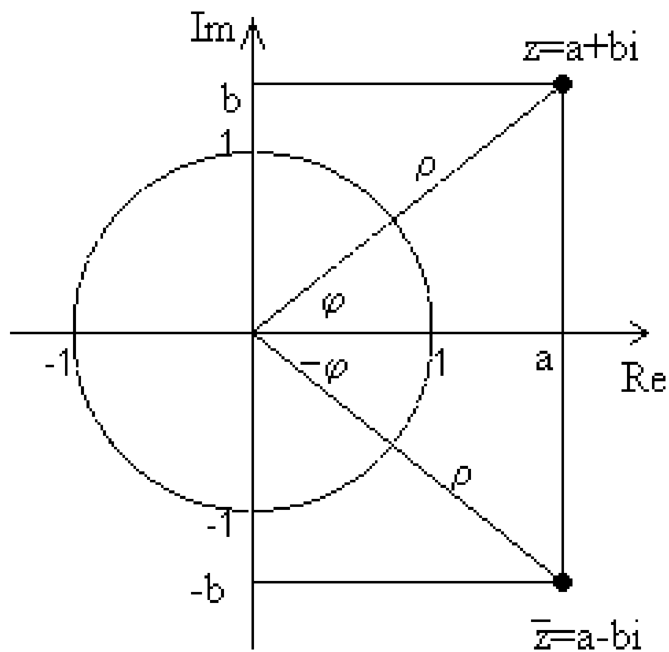
Комплексни бројеви су бројеви облика

$$z = a + b \cdot i,$$

при чему су $a, b \in \mathbb{R}$.
Број a је *реалан део* комплексног броја z,
број b је *имагинаран део* (не $b \cdot i$!).
Ознаке су: $\mathcal{R}e\ z = a$ и $\mathcal{I}m\ z = b$.

Сваком комплексном броју $z = a + bi$
(то је *алгебарски облик* комплексног броја)
одговара једна тачка у комплексној равни са
координатама (a, b) и обратно
(x–оса је реална оса, а y–оса је имагинарна).

Сваком комплексном броју $z = a + bi$ одговара једна тачка у комплексној равни са координатама (a, b) и обратно (x–оса је реална оса, а y–оса је имагинарна).

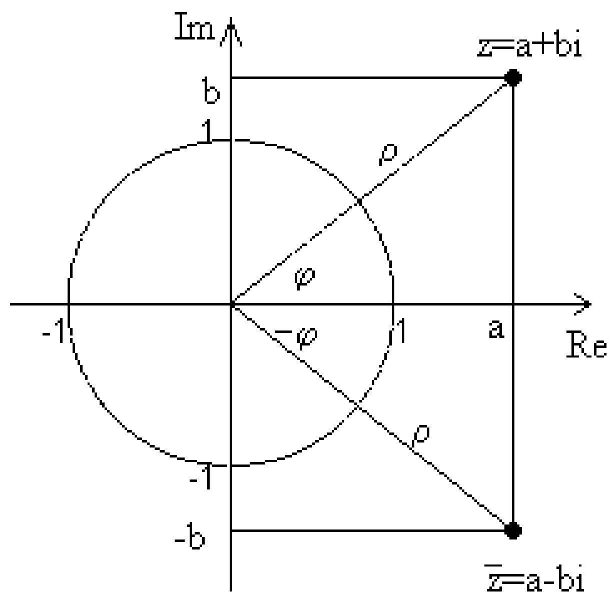


За комплексан број $z = a + bi$, уводимо *конјуговано комплексан број*:

$$\overline{z} = a - bi$$

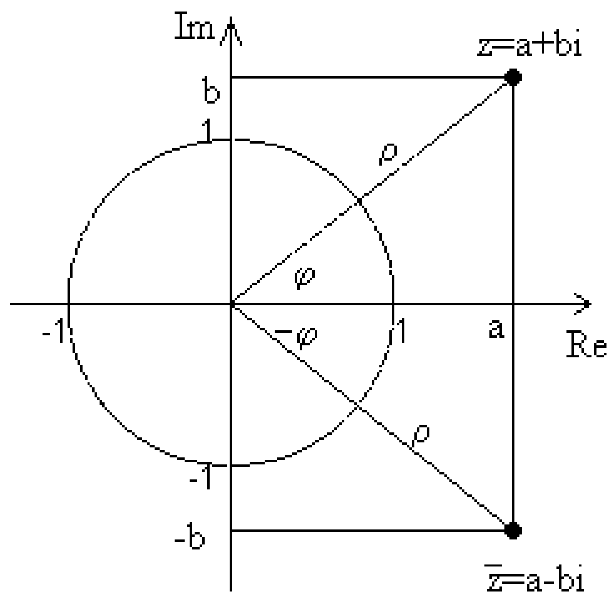
За комплексан број $z = a + bi$, уводимо *конјуговано комплексан број*:

$$\overline{z} = a - bi$$



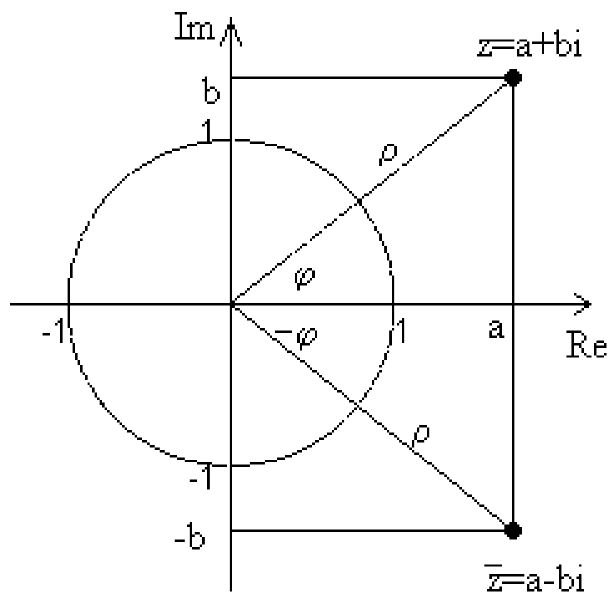
Модуо комплексног броја се уводи као:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



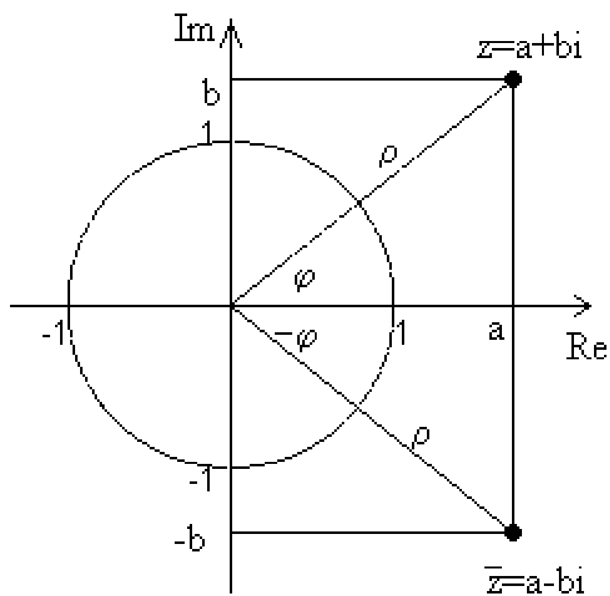
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Геометријска интерпретација: модуо $|z|$ је удаљеност тачке z од координатног почетка, тј. комплексног броја $0 = 0 + 0i$.

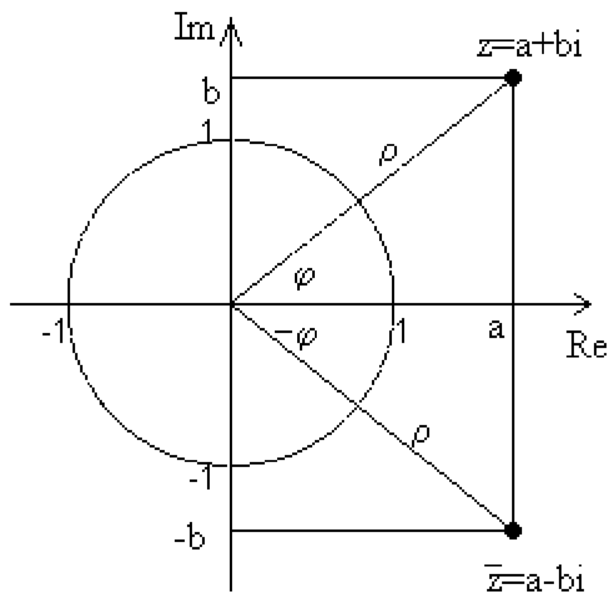


Геометријска интерпретација: модуо $|z|$ је удаљеност тачке z од координатног почетка, тј. комплексног броја $0 = 0 + 0i$.

Скуп тачака за које је $|z| = 1$ представља *јединичну кружницу* са центром у 0.



Угао φ који заклапа полуправа Oz (полуправа која спаја 0 са z) са позитивним делом реалне осе је *аргумент* комплексног броја. Аргумент $\varphi \in (-\pi, \pi]$ да важи $\arg \overline{z} = -\arg z$.



Угао φ који заклапа полуправа Oz (полуправа која спаја 0 са z) са позитивним делом реалне осе је *аргумент* комплексног броја. Аргумент $\varphi \in (-\pi, \pi]$ да важи $\arg \overline{z} = -\arg z$.

за z у I или IV квадранту је $\arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{\mathcal{I}m\ z}{\mathcal{R}e\ z}$;

за z у II је $\arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{\mathcal{I}m\ z}{\mathcal{R}e\ z} + \pi$;

за z у III је $\arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{\mathcal{I}m\ z}{\mathcal{R}e\ z} - \pi$.

Комплексни бројеви су решења квадратне једначине

$$ax^2 + bx + c = 0$$

у случају 3° $D < 0$ (када је дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратне једначине негативна).

Комплексни бројеви су решења квадратне једначине

$$ax^2 + bx + c = 0$$

у случају 3° $D < 0$ (када је дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратне једначине негативна).

У том случају формула гласи:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Два $\mathbb{C}$ броја $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ су *једнака* уколико су им једнаки и реални делови и имагинарни делови, тј.

$z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

У $\mathbb{C}$ ($z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$) основне 4 операције:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

У $\mathbb{C}$ ($z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$) основне 4 операције:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

У $\mathbb{C}$ ($z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$) основне 4 операције:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

У $\mathbb{C}$ $(z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i)$ основне 4 операције:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \tfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

У $\mathbb{C}$ $(z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i)$ основне 4 операције:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} i.$$

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3. \end{cases}$$

Тригонометријски облик комплексног броја је

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ρ модуо, а φ аргумент z. Скраћено $z = \rho \operatorname{cis}\varphi$.

Тригонометријски облик комплексног броја је

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ρ модуо, а φ аргумент z. Скраћено $z = \rho\,\mathrm{cis}\,\varphi$.

Ојлерова формула:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Тригонометријски облик комплексног броја је

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ρ модуо, а φ аргумент z. Скраћено $z = \rho \operatorname{cis}\varphi$.

Ојлерова формула:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$\Rightarrow$ *експоненцијални облик* комплексног броја:

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi}.$$

Тригонометријски облик комплексног броја је

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

Ојлерова формула:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$\Rightarrow$ *експоненцијални облик* комплексног броја:

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi}.$$

$$\mathcal{R}e\ z = \rho\cos\varphi, \qquad \mathcal{I}m\ z = \rho\sin\varphi.$$

За тражење n-тог степена комплексног броја z, $w = z^n$, користимо *Моаврову формулу*:

$$\left[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

Када се тражи да се одреде *n-ти корени* из комплексног броја z, треба одредити сва решења једначине $u^n = z$. Њих има тачно n и дата су:

$$u_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

где је $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Задаци

1. 1.а),б) јун 2018. А гр.

Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у $\mathbb{C}$ равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у $\mathbb{C}$ равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење.

$\mathcal{R}e\ a = 2$,

$\mathcal{R}e\ b = 3$,

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у $\mathbb{C}$ равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење.

$\mathcal{R}e\ a = 2$, $\mathcal{I}m\ a = -2$,

$\mathcal{R}e\ b = 3$, $\mathcal{I}m\ b = 1$,

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у $\mathbb{C}$ равни.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење.

$\mathcal{R}e\ a = 2$, $\mathcal{I}m\ a = -2$, $\overline{a} = 2 + 2i$,

$\mathcal{R}e\ b = 3$, $\mathcal{I}m\ b = 1$, $\overline{b} = 3 - i$,

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у $\mathbb{C}$ равни.

Решење.

$\mathcal{R}e\ a = 2$, $\mathcal{I}m\ a = -2$, $\overline{a} = 2 + 2i$,
$|a| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$\mathcal{R}e\ b = 3$, $\mathcal{I}m\ b = 1$, $\overline{b} = 3 - i$,
$|b| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у $\mathbb{C}$ равни.

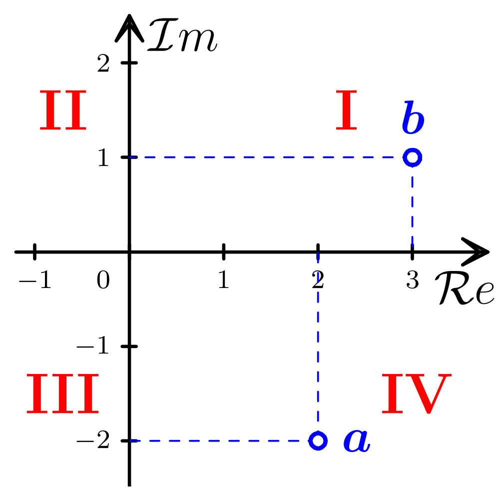
Решење.

$\mathcal{R}e\ a = 2$, $\mathcal{I}m\ a = -2$, $\overline{a} = 2 + 2i$,

$|a| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$\mathcal{R}e\ b = 3$, $\mathcal{I}m\ b = 1$, $\overline{b} = 3 - i$,

$|b| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,



1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

а) Одредити за сваки од њих реални део, имагинарни део, конјуговано комплексни број, модуо, аргумент и представити их у $\mathbb{C}$ равни.

Решење.

$\mathcal{R}e\ a = 2$, $\mathcal{I}m\ a = -2$, $\overline{a} = 2 + 2i$,

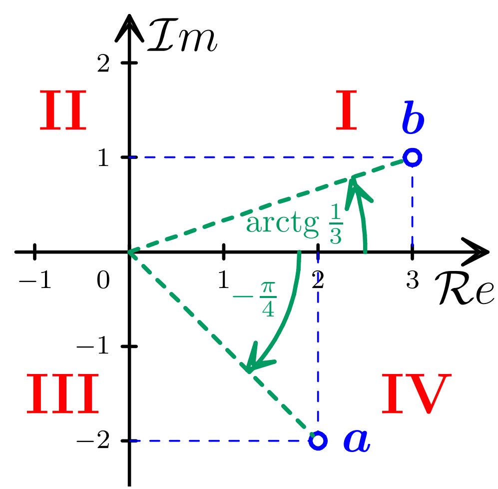
$|a| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$\arg a = \operatorname{arctg} \frac{-2}{2} = -\frac{\pi}{4}$,

$\mathcal{R}e\ b = 3$, $\mathcal{I}m\ b = 1$, $\overline{b} = 3 - i$,

$|b| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,

$\arg b = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.



1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a + b = (2 - 2i) + (3 + i) = 5 - i$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a + b = (2 - 2i) + (3 + i) = 5 - i$

$\mathcal{R}e\,(a + b) = 5$,

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a + b = (2 - 2i) + (3 + i) = 5 - i$

$\mathcal{R}e\,(a + b) = 5, \qquad \mathcal{I}m\,(a + b) = -1.$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a + b = (2 - 2i) + (3 + i) = 5 - i$

$\mathcal{R}e\,(a + b) = 5, \qquad \mathcal{I}m\,(a + b) = -1.$

$a - b = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a + b = (2 - 2i) + (3 + i) = 5 - i$

$\mathcal{R}e\,(a + b) = 5, \qquad \mathcal{I}m\,(a + b) = -1.$

$a - b = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$

$\mathcal{R}e\,(a - b) = -1,$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a + b = (2 - 2i) + (3 + i) = 5 - i$

$\mathcal{R}e\,(a + b) = 5, \qquad \mathcal{I}m\,(a + b) = -1.$

$a - b = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$

$\mathcal{R}e\,(a - b) = -1, \qquad \mathcal{I}m\,(a - b) = -3.$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a + b = (2 - 2i) + (3 + i) = 5 - i$

$\mathcal{R}e\,(a + b) = 5, \qquad \mathcal{I}m\,(a + b) = -1.$

$a - b = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$

$\mathcal{R}e\,(a - b) = -1, \qquad \mathcal{I}m\,(a - b) = -3.$

$a \cdot b = (2 - 2i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 6i - 2i^2 = 8 - 4i$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a + b = (2 - 2i) + (3 + i) = 5 - i$

$\mathcal{R}e\,(a + b) = 5, \qquad \mathcal{I}m\,(a + b) = -1.$

$a - b = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$

$\mathcal{R}e\,(a - b) = -1, \qquad \mathcal{I}m\,(a - b) = -3.$

$a \cdot b = (2 - 2i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 6i - 2i^2 = 8 - 4i$

$\mathcal{R}e\,(a \cdot b) = 8,$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a + b = (2 - 2i) + (3 + i) = 5 - i$

$\mathcal{R}e\,(a + b) = 5, \qquad \mathcal{I}m\,(a + b) = -1.$

$a - b = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$

$\mathcal{R}e\,(a - b) = -1, \qquad \mathcal{I}m\,(a - b) = -3.$

$a \cdot b = (2 - 2i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 6i - 2i^2 = 8 - 4i$

$\mathcal{R}e\,(a \cdot b) = 8, \qquad \mathcal{I}m\,(a \cdot b) = -4.$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a - b = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$

$\mathcal{R}e\,(a - b) = -1, \qquad \mathcal{I}m\,(a - b) = -3.$

$a \cdot b = (2 - 2i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 6i - 2i^2 = 8 - 4i$

$\mathcal{R}e\,(a \cdot b) = 8, \qquad \mathcal{I}m\,(a \cdot b) = -4.$

$\frac{a}{b} = \frac{2-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{6-2i-6i+2i^2}{3^2-i^2} = \frac{4-8i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a - b = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$

$\mathcal{R}e\,(a - b) = -1, \qquad \mathcal{I}m\,(a - b) = -3.$

$a \cdot b = (2 - 2i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 6i - 2i^2 = 8 - 4i$

$\mathcal{R}e\,(a \cdot b) = 8, \qquad \mathcal{I}m\,(a \cdot b) = -4.$

$\frac{a}{b} = \frac{2-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{6-2i-6i+2i^2}{3^2-i^2} = \frac{4-8i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$

$\mathcal{R}e\,\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2}{5},$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење. $a - b = (2 - 2i) - (3 + i) = -1 - 3i$

$\mathcal{R}e\,(a - b) = -1, \qquad \mathcal{I}m\,(a - b) = -3.$

$a \cdot b = (2 - 2i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 6i - 2i^2 = 8 - 4i$

$\mathcal{R}e\,(a \cdot b) = 8, \qquad \mathcal{I}m\,(a \cdot b) = -4.$

$\frac{a}{b} = \frac{2-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{6-2i-6i+2i^2}{3^2-i^2} = \frac{4-8i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$

$\mathcal{R}e\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2}{5}, \qquad \mathcal{I}m\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4}{5}.$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење.

$a \cdot b = (2 - 2i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 6i - 2i^2 = 8 - 4i$

$\mathcal{R}e\,(a \cdot b) = 8, \qquad \mathcal{I}m\,(a \cdot b) = -4.$

$\frac{a}{b} = \frac{2-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{6-2i-6i+2i^2}{3^2-i^2} = \frac{4-8i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$

$\mathcal{R}e\,(\frac{a}{b}) = \frac{2}{5}, \qquad \mathcal{I}m\,(\frac{a}{b}) = \frac{4}{5}.$

$\frac{b}{a} = \frac{3+i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{6+6i+2i+2i^2}{2^2-(2i)^2} = \frac{4+8i}{8} = \frac{1}{2} - i$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење.

$$a \cdot b = (2 - 2i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 6i - 2i^2 = 8 - 4i$$

$$\mathcal{R}e\,(a \cdot b) = 8, \qquad \mathcal{I}m\,(a \cdot b) = -4.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{6-2i-6i+2i^2}{3^2-i^2} = \frac{4-8i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$\mathcal{R}e\,\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2}{5}, \qquad \mathcal{I}m\,\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3+i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{6+6i+2i+2i^2}{2^2-(2i)^2} = \frac{4+8i}{8} = \frac{1}{2} - i$$

$$\mathcal{R}e\,\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2},$$

1. Дати су компл. бр. $a = 2 - 2i$ и $b = 3 + i$.

б) Израчунати $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ и $b : a$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део сваког од ових бројева?

Решење.

$$a \cdot b = (2 - 2i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 6i - 2i^2 = 8 - 4i$$

$$\mathcal{R}e\,(a \cdot b) = 8, \qquad \mathcal{I}m\,(a \cdot b) = -4.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{6-2i-6i+2i^2}{3^2-i^2} = \frac{4-8i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$\mathcal{R}e\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2}{5}, \qquad \mathcal{I}m\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3+i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{6+6i+2i+2i^2}{2^2-(2i)^2} = \frac{4+8i}{8} = \frac{1}{2} - i$$

$$\mathcal{R}e\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \mathcal{I}m\left(\frac{b}{a}\right) = -1. \qquad \blacksquare$$

2. прijемни ФОН 2010.

Вредност израза $\dfrac{i^{2010}-i^{2011}}{i^{2010}-i^{2009}}$, где je $i^2=-1$, једнака je:

А) $-1+i$; **Б)** $-1-i$; **Ц)** $1+i$; **Д)** i; **Е)** $-i$;
Н) не знам.

2. прijeмни ФОН 2010.

Вредност израза $\dfrac{i^{2010}-i^{2011}}{i^{2010}-i^{2009}}$, где je $i^2=-1$, jеднака je:

А) $-1+i$; **Б)** $-1-i$; **Ц)** $1+i$; **Д)** i; **Е)** $-i$;
Н) не знам.

Решење.

$2009 = 4\cdot 502+1 \Rightarrow i^{2009}=i^1=i$

2. пријемни ФОН 2010.

Вредност израза $\dfrac{i^{2010}-i^{2011}}{i^{2010}-i^{2009}}$, где је $i^2=-1$, једнака је:

А) $-1+i$; **Б)** $-1-i$; **Ц)** $1+i$; **Д)** i; **Е)** $-i$; **Н)** не знам.

Решење.

$2009 = 4\cdot 502+1 \Rightarrow i^{2009}=i^1=i$

$2010 = 4\cdot 502+2 \Rightarrow i^{2010}=i^2=-1$

2. прijемни ФОН 2010.

Вредност израза $\dfrac{i^{2010}-i^{2011}}{i^{2010}-i^{2009}}$, где је $i^2=-1$, једнака је:

А) $-1+i$; **Б**) $-1-i$; **Ц**) $1+i$; **Д**) i; **Е**) $-i$;

Н) не знам.

Решење.

$2009 = 4\cdot 502+1 \Rightarrow i^{2009}=i^1=i$

$2010 = 4\cdot 502+2 \Rightarrow i^{2010}=i^2=-1$

$2011 = 4\cdot 502+3 \Rightarrow i^{2011}=i^3=-i$

2. Вредност израза $\dfrac{i^{2010} - i^{2011}}{i^{2010} - i^{2009}}$ једнака је:

А) $-1+i$; **Б)** $-1-i$; **Ц)** $1+i$; **Д)** i; **Е)** $-i$;

Решење.

$2009 = 4 \cdot 502 + 1 \Rightarrow i^{2009} = i^1 = i$

$2010 = 4 \cdot 502 + 2 \Rightarrow i^{2010} = i^2 = -1$

$2011 = 4 \cdot 502 + 3 \Rightarrow i^{2011} = i^3 = -i$

$$\frac{i^{2010} - i^{2011}}{i^{2010} - i^{2009}} = \frac{-1-(-i)}{-1-i} = \frac{-1+i}{-1-i}$$

2. Вредност израза $\dfrac{i^{2010}-i^{2011}}{i^{2010}-i^{2009}}$ једнака је:

А) $-1+i$; **Б)** $-1-i$; **Ц)** $1+i$; **Д)** i; **Е)** $-i$;

Решење.

$2009 = 4\cdot 502 + 1 \Rightarrow i^{2009} = i^1 = i$

$2010 = 4\cdot 502 + 2 \Rightarrow i^{2010} = i^2 = -1$

$2011 = 4\cdot 502 + 3 \Rightarrow i^{2011} = i^3 = -i$

$$\frac{i^{2010}-i^{2011}}{i^{2010}-i^{2009}} = \frac{-1-(-i)}{-1-i} = \frac{-1+i}{-1-i}\cdot\frac{-1+i}{-1+i}$$

$$= \frac{-1-i-i+i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i. \qquad \blacksquare$$

3. 2. I кол 2017-8. 9. гр.

Наћи реалне бројеве x и y такве да важи једнакост $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

3. 2. I кол 2017-8. 9. гр.

Наћи реалне бројеве x и y такве да важи једнакост $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

Решење.

$$x+2xi+3y-5yi=1-3i$$

3. 2. I кол 2017-8. 9. гр.

Наћи реалне бројеве x и y такве да важи једнакост $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

Решење.

$$x+2xi+3y-5yi=1-3i$$

$$\mathcal{R}e: \quad x+2xi+3y-5yi=1-3i \;\Rightarrow\; x+3y=1;$$

3. 2. I кол 2017-8. 9. гр.

Наћи реалне бројеве x и y такве да важи једнакост $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

Решење.

$$x+2xi+3y-5yi=1-3i$$

$\mathcal{R}e:\quad x+2xi+3y-5yi=1-3i \;\Rightarrow\; x+3y=1;$

$\mathcal{I}m:\quad x+2xi+3y-5yi=1-3i \Rightarrow 2x-5y=-3;$

3. 2. I кол 2017-8. 9. гр.

Наћи реалне бројеве x и y такве да важи једнакост $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

Решење.

$$x+2xi+3y-5yi=1-3i$$

$\mathcal{R}e:$ $x+2xi+3y-5yi=1-3i \;\Rightarrow\; x+3y=1;$

$\mathcal{I}m:$ $x+2xi+3y-5yi=1-3i \;\Rightarrow\; 2x-5y=-3;$

Решење система $\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 1 \\ 2x & - & 5y & = & -3 \end{array}$ је

$x=-\frac{4}{11}$, $y=\frac{5}{11}$. ■

4. 1. фебруар 2018. А гр.

Решити у скупу $\mathbb{C}$ једначину

$$(3+2i)\cdot z+4+5i=9+4i.$$

Наћи реалан део $\mathcal{R}e\ z$, имагинаран део $\mathcal{I}m\ z$, конјуговано комплексни број $\overline{z}$, модуо $|z|$, аргумент $\arg z$ и представити z и $\overline{z}$ у комплексној равни.

4. 1. фебруар 2018. А гр.

Решити у скупу $\mathbb{C}$ једначину

$$(3+2i)\cdot z+4+5i=9+4i.$$

Наћи реалан део $\mathcal{R}e\ z$, имагинаран део $\mathcal{I}m\ z$, конјуговано комплексни број $\overline{z}$, модуо $|z|$, аргумент $\arg z$ и представити z и $\overline{z}$ у комплексној равни.

Решење.
$(3+2i)\cdot z=9+4i-(4+5i)$

4. 1. фебруар 2018. А гр.

Решити у скупу $\mathbb{C}$ једначину

$$(3+2i)\cdot z+4+5i=9+4i.$$

Наћи реалан део $\mathcal{R}e\ z$, имагинаран део $\mathcal{I}m\ z$, конјуговано комплексни број $\overline{z}$, модуо $|z|$, аргумент $\arg z$ и представити z и $\overline{z}$ у комплексној равни.

Решење.

$(3+2i)\cdot z=9+4i-(4+5i)$

$(3+2i)\cdot z=5-i$

4. 1. фебруар 2018. А гр.

Решити у скупу $\mathbb{C}$ једначину

$$(3+2i)\cdot z+4+5i=9+4i.$$

Решење.

$(3+2i)\cdot z=9+4i-(4+5i)$

$(3+2i)\cdot z=5-i \quad / \quad :(3+2i)$

$z=\frac{5-i}{3+2i}$

4. 1. фебруар 2018. А гр.

Решити у скупу $\mathbb{C}$ једначину

$$(3+2i)\cdot z+4+5i=9+4i.$$

Решење.

$(3+2i)\cdot z=9+4i-(4+5i)$

$(3+2i)\cdot z=5-i \quad / \quad :(3+2i)$

$z=\frac{5-i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{15-10i-3i+2i^2}{3^2+2^2}=\frac{13-13i}{13}=1-i$

Решење.

$$(3+2i)\cdot z = 9+4i-(4+5i)$$

$$(3+2i)\cdot z = 5-i \quad / \quad :(3+2i)$$

$$z=\frac{5-i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{15-10i-3i+2i^2}{3^2+2^2}=\frac{13-13i}{13}=1-i$$

$$\mathcal{R}e\ z=1, \quad \mathcal{I}m\ z=-1, \quad \overline{z}=1+i, \quad |z|=\sqrt{2},$$

$$\arg z=-\frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

5. 2. I кол 2017-8. 10. гр.

Број $13 + i$ може да се представи као производ $1 + 2i$ и ког комплексног броја?

5. 2. I кол 2017-8. 10. гр.

Број $13+i$ може да се представи као производ $1+2i$ и ког комплексног броја?

Решење. $13+i=(1+2i)\cdot z$

5. 2. I кол 2017-8. 10. гр.

Број $13+i$ може да се представи као производ $1+2i$ и ког комплексног броја?

Решење. $13+i=(1+2i)\cdot z \quad / \quad :(1+2i)$

$$z=\frac{13+i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{13-26i+i-2i^2}{1^2+2^2}=\frac{15-25i}{5}=3-5i$$

■

6. 2. I кол 2017-8. 11. гр.

Производ комплексног броја $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{Z}$, и комплексног броја $w = 5 - 6i$ је реалан број x. Наћи све вредности z.

6. 2. I кол 2017-8. 11. гр.

Производ комплексног броја $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{Z}$, и комплексног броја $w = 5 - 6i$ је реалан број x. Наћи све вредности z.

Резултат. $5k + 6ki,\ k \in \mathbb{Z}$. ■

7. 2. I кол 2017-8. 12. гр.

Нека је дат комплексан број $w = -3 + 8i$. Нека је z комплексан број за који важи

$$\mathcal{R}e\ z = \mathcal{R}e\ w,$$

као и да је производ z и w реалан број. Одредити z, као и вредност производа $z \cdot w$.

7. 2. I кол 2017-8. 12. гр.

Нека је дат комплексан број $w = -3 + 8i$. Нека је z комплексан број за који важи

$$\mathcal{R}e\ z = \mathcal{R}e\ w,$$

као и да је производ z и w реалан број. Одредити z, као и вредност производа $z \cdot w$.

Резултат. $z = -3 - 8i$, $z \cdot w = 73$. ■

8. 2. I кол 2017-8. 1. гр.

Решити једначину: $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0.$

8. 2. I кол 2017-8. 1. гр.

Решити једначину: $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0.$

Решење. $a = 1, \qquad b = -(3+2i), \qquad c = 5+i.$

Дискриминанта $D = \Big(-(3+2i)\Big)^2 - 4\cdot 1\cdot(5+i)$

8. 2. I кол 2017-8. 1. гр.

Решити једначину: $z^2-(3+2i)z+5+i=0.$

Решење. $a=1, \quad b=-(3+2i), \quad c=5+i.$

Дискриминанта $D=\big(-(3+2i)\big)^2-4\cdot 1\cdot(5+i)$

$D=+(9+12i+4i^2)-20-4i=-15+8i.$

Треба да „извучемо“ корен из D!

8. 2. I кол 2017-8. 1. гр.

Решити једначину: $z^2-(3+2i)z+5+i=0.$

Решење. $a=1, \quad b=-(3+2i), \quad c=5+i.$

Дискриминанта $D=\big(-(3+2i)\big)^2-4\cdot 1\cdot(5+i)$

$D=+(9+12i+4i^2)-20-4i=-15+8i.$

Треба да „извучемо" корен из D!

$$(x+iy)^2=-15+8i$$

$$x^2-y^2+2xyi=-15+8i$$

8. 2. I кол 2017-8. 1. гр.

Решити једначину: $z^2-(3+2i)z+5+i=0.$

Решење. $a=1,\quad b=-(3+2i),\quad c=5+i.$

Дискриминанта $D=\Big(-(3+2i)\Big)^2-4\cdot 1\cdot(5+i)$

$D=+(9+12i+4i^2)-20-4i=-15+8i.$

$$(x+iy)^2=-15+8i$$

$$x^2-y^2+2xyi=-15+8i$$

$\mathcal{R}e:\ x^2-y^2+2xyi=-15+8i \Rightarrow x^2-y^2=-15;$

8. 2. I кол 2017-8. 1. гр.

Решити једначину: $z^2-(3+2i)z+5+i=0.$

Решење. $a=1,\qquad b=-(3+2i),\qquad c=5+i.$

Дискриминанта $D=\Big(-(3+2i)\Big)^2-4\cdot 1\cdot(5+i)$

$D=+(9+12i+4i^2)-20-4i=-15+8i.$

$$(x+iy)^2=-15+8i$$

$$x^2-y^2+2xyi=-15+8i$$

$\mathcal{R}e:\ x^2-y^2+2xyi=-15+8i\Rightarrow x^2-y^2=-15;$

$\mathcal{I}m:\ x^2-y^2+2xyi=-15+8i\quad\Rightarrow\quad xy=4;$

Решење. $a = 1$, $b = -(3+2i)$, $c = 5+i$.
$D = +(9+12i+4i^2) - 20 - 4i = -15+8i$.

$$(x+iy)^2 = -15+8i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -15+8i$$

$\mathcal{R}e:\ x^2 - y^2 + 2xyi = -15 + 8i \Rightarrow x^2 - y^2 = -15$;

$\mathcal{I}m:\ x^2 - y^2 + 2xyi = -15 + 8i \Rightarrow xy = 4$;

Решење система $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -15 \\ x \cdot y &= 4 \end{aligned}$ је

Решење. $a = 1, \quad b = -(3+2i), \quad c = 5+i.$
$D = +(9 + 12i + 4i^2) - 20 - 4i = -15 + 8i.$

$$(x+iy)^2 = -15 + 8i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -15 + 8i$$

$\mathcal{R}e: \ x^2 - y^2 + 2xyi = -15 + 8i \Rightarrow x^2 - y^2 = -15;$

$\mathcal{I}m: \ x^2 - y^2 + 2xyi = -15 + 8i \quad \Rightarrow \quad xy = 4;$

Решење система $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \ -15 \\ x \cdot y &= \ 4 \end{aligned}$ је

$x = 1$ и $y = 4$ (као и $x = -1$ и $y = -4$).

Решење. $\quad a = 1, \qquad b = -(3+2i), \qquad c = 5+i.$
$D = +(9+12i+4i^2) - 20 - 4i = -15+8i.$

$$(x+iy)^2 = -15+8i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -15+8i$$

$\mathcal{R}e: \; x^2 - y^2 + 2xyi = -15 + 8i \Rightarrow x^2 - y^2 = -15;$

$\mathcal{I}m: \; x^2 - y^2 + 2xyi = -15 + 8i \qquad \Rightarrow \qquad xy = 4;$

Решење система $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \; -15 \\ x \cdot y &= \; 4 \end{aligned}$ je

$x = 1$ и $y = 4$ (као и $x = -1$ и $y = -4$).

$z_{1,2} = \frac{(3+2i)\pm(1+4i)}{2\cdot 1} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2+3i$ и $z_2 = 1-i.$

$\blacksquare$

9. 1.в) јун 2018. А гр.

Израчунати $w = (2 - 2i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део овог броја?

9. 1.в) јун 2018. А гр.

Израчунати $w = (2-2i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део овог броја?

Решење 1.

$w = (2-2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i = -2^3 i.$

9. 1.в) јун 2018. А гр.

Израчунати $w = (2-2i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део овог броја?

Решење 1.

$w = (2-2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i = -2^3 i.$

$$w = (2-2i)^{2018} = \left((2-2i)^2\right)^{1009} = (-2^3 i)^{1009} = (-1)^{1009} \cdot (2^3)^{1009} \cdot i^{1009}$$

9. 1.в) јун 2018. А гр.

Израчунати $w = (2-2i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део овог броја?

Решење 1.

$w = (2-2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i = -2^3 i.$

$$w = (2-2i)^{2018} = \left((2-2i)^2\right)^{1009} = (-2^3 i)^{1009} =$$
$$(-1)^{1009} \cdot (2^3)^{1009} \cdot i^{1009} = -2^{3027} i$$

(јер је $i^{1009} = i^{4\cdot 252+1} = i^1 = i$)

9. 1.в) јун 2018. А гр.

Израчунати $w = (2-2i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део овог броја?

Решење 1.

$a^2 = (2-2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i = -2^3 i.$

$$w = (2-2i)^{2018} = \left((2-2i)^2\right)^{1009} = (-2^3 i)^{1009} =$$
$$(-1)^{1009} \cdot (2^3)^{1009} \cdot i^{1009} = -2^{3027} i$$

(јер је $i^{1009} = i^{4\cdot 252+1} = i^1 = i$)

$\mathcal{R}e\ w = 0$, $\mathcal{I}m\ w = -2^{3027}$. ■

9. 1.в) јун 2018. А гр.

Израчунати $w = (2-2i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део овог броја?

Решење 2. $a = 2-2i$ има $\rho = \sqrt{8}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{8}\Big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\Big)$.

9. 1.в) јун 2018. А гр.

Израчунати $w = (2-2i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део овог броја?

Решење 2. $a = 2-2i$ има $\rho = \sqrt{8}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{8}\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$.

убацимо у Моаврову формулу за n-те степене

$$\big[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$w = a^{2018} = (\sqrt{8})^{2018}(\cos(-\frac{2018\pi}{4}) + i\sin(-\frac{2018\pi}{4})\big)$

Решење 2. $a = 2 - 2i$ има $\rho = \sqrt{8}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.
$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{8}\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$.
убацимо у Моаврову формулу за n-те степене

$$\big[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\begin{aligned} w = a^{2018} &= (\sqrt{8})^{2018}\Big(\cos(-\tfrac{2018\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{2018\pi}{4})\Big) \\ &= (2^{3/2})^{2018}\Big(\cos(-504\pi - \tfrac{\pi}{2}) + i\sin(-504\pi - \tfrac{\pi}{2})\Big) \end{aligned}$$

Решење 2. $\quad a = 2 - 2i$ има $\quad \rho = \sqrt{8}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{8}\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$.

убацимо у Моаврову формулу за n-те степене

$$\big[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\begin{aligned} w = a^{2018} &= (\sqrt{8})^{2018}\Big(\cos(-\frac{2018\pi}{4}) + i\sin(-\frac{2018\pi}{4})\Big) \\ &= (2^{3/2})^{2018}\Big(\cos(-504\pi - \frac{\pi}{2}) + i\sin(-504\pi - \frac{\pi}{2})\Big) \\ &= 2^{\frac{3\cdot 2018}{2}}\Big(\cos(\frac{\pi}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2})\Big) = 2^{3027}(0 - i\cdot 1) \end{aligned}$$

Решење 2. $a = 2 - 2i$ има $\rho = \sqrt{8}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{8}\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$.

убацимо у Моаврову формулу за n-те степене

$$\big[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\begin{aligned} w = a^{2018} &= (\sqrt{8})^{2018}\big(\cos(-\tfrac{2018\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{2018\pi}{4})\big) \\ &= (2^{3/2})^{2018}\big(\cos(-504\pi - \tfrac{\pi}{2}) + i\sin(-504\pi - \tfrac{\pi}{2})\big) \\ &= 2^{\frac{3\cdot 2018}{2}}\big(\cos(\tfrac{\pi}{2}) - i\sin(\tfrac{\pi}{2})\big) = 2^{3027}(0 - i\cdot 1) \end{aligned}$$

$w = -2^{3027}i$; $\mathcal{R}e\ w = 0$, $\mathcal{I}m\ w = -2^{3027}$. ■

10. 1.в) септембар 2018. А гр.

Израчунати $w = (2 + 2\sqrt{3}i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део w?

10. 1.в) септембар 2018. А гр.

Израчунати $w = (2+2\sqrt{3}i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део w?

Решење 1.

$a^2 = (2+2\sqrt{3}i)^2 = 4 + 8\sqrt{3}i + 12i^2 = -8 + 8\sqrt{3}i.$

10. 1.в) септембар 2018. А гр.

Израчунати $w = (2+2\sqrt{3}i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део w?

Решење 1.

$a^2 = (2+2\sqrt{3}i)^2 = 4 + 8\sqrt{3}i + 12i^2 = -8 + 8\sqrt{3}i.$

$$\begin{aligned} a^3 &= a^2 \cdot a = (-8+8\sqrt{3}i)\cdot(2+2\sqrt{3}i) \\ &= -16 - 16\sqrt{3}i + 16\sqrt{3}i + 48i^2 = -64 = -2^6. \end{aligned}$$

10. 1.в) септембар 2018. А гр.

Израчунати $w = (2 + 2\sqrt{3}i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део w?

Решење 1.

$a^2 = (2 + 2\sqrt{3}i)^2 = 4 + 8\sqrt{3}i + 12i^2 = -8 + 8\sqrt{3}i.$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (-8 + 8\sqrt{3}i) \cdot (2 + 2\sqrt{3}i)$$
$$= -16 - 16\sqrt{3}i + 16\sqrt{3}i + 48i^2 = -64 = -2^6.$$

$w = (2 + 2\sqrt{3}i)^{2018} = (2 + 2\sqrt{3}i)^{3 \cdot 672 + 2}$

10. 1.в) септембар 2018. А гр.

Израчунати $w = (2 + 2\sqrt{3}i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део w?

Решење 1.

$a^2 = (2 + 2\sqrt{3}i)^2 = 4 + 8\sqrt{3}i + 12i^2 = -8 + 8\sqrt{3}i.$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (-8 + 8\sqrt{3}i) \cdot (2 + 2\sqrt{3}i)$$
$$= -16 - 16\sqrt{3}i + 16\sqrt{3}i + 48i^2 = -64 = -2^6.$$

$$w = (2 + 2\sqrt{3}i)^{2018} = (2 + 2\sqrt{3}i)^{3\cdot 672+2}$$
$$= \left((2 + 2\sqrt{3}i)^3\right)^{672} \cdot (2 + 2\sqrt{3}i)^2$$

Решење 1.

$$a^2 = (2+2\sqrt{3}i)^2 = 4 + 8\sqrt{3}i + 12i^2 = -8 + 8\sqrt{3}i.$$

$$\begin{aligned} a^3 = a^2 \cdot a &= (-8+8\sqrt{3}i)\cdot(2+2\sqrt{3}i). \\ &= -16 - 16\sqrt{3}i + 16\sqrt{3}i + 48i^2 = -64 = -2^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = (2+2\sqrt{3}i)^{2018} &= (2+2\sqrt{3}i)^{3\cdot 672+2} \\ &= \left((2+2\sqrt{3}i)^3\right)^{672}\cdot(2+2\sqrt{3}i)^2 \\ &= (-2^6)^{672}\cdot(-8+8\sqrt{3}i) = 2^{4035}\cdot(-1+\sqrt{3}\,i); \end{aligned}$$

$\mathcal{R}e\ w = -2^{4035}$, $\mathcal{I}m\ w = 2^{4035}\sqrt{3}$. ■

10. 1.в) септембар 2018. А гр.

Израчунати $w = (2 + 2\sqrt{3}i)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део w?

Решење 2. $a = 2 + 2\sqrt{3}i$ има $\rho = 4$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2^2 \cdot \big(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\big)$.

убацимо у Моаврову формулу за n-те степене

$$\big[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$w = a^{2018} = (2^2)^{2018}\big(\cos(\frac{2018\pi}{3}) + i\sin(\frac{2018\pi}{3})\big)$

Решење 2. $a=2+2\sqrt{3}i$ има $\rho=4$ и $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

$a=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2^2\cdot\big(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})\big)$.

убацимо у Моаврову формулу за n-те степене

$$\big[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\big]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

$$\begin{aligned}w=a^{2018}&=(2^2)^{2018}\big(\cos(\tfrac{2018\pi}{3})+i\sin(\tfrac{2018\pi}{3})\big)\\&=2^{2\cdot2018}\big(\cos(672\pi+\tfrac{2\pi}{3})+i\sin(672\pi+\tfrac{2\pi}{3})\big)\\&=2^{4036}\big(\cos(\tfrac{2\pi}{3})+i\sin(\tfrac{2\pi}{3})\big)=2^{4036}\big(-\tfrac{1}{2}+i\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big)\end{aligned}$$

$w=2^{4035}(-1+\sqrt{3}\,i)$;

$\mathcal{R}e\ w=-2^{4035}$, $\mathcal{I}m\ w=2^{4035}\sqrt{3}$. $\blacksquare$

11. 2. I кол 2017-8. 8. гр.

Одредити реални и имагинарни део од $z = (-1 + \sqrt{3}\, i)^{25}$.

11. 2. I кол 2017-8. 8. гр.

Одредити реални и имагинарни део од $z = (-1 + \sqrt{3}\, i)^{25}$.

Резултат. $z = 2^{24}(-1 + \sqrt{3}i)$, $\mathcal{R}e\ z = -2^{24}$, $\mathcal{I}m\ z = 2^{24}\sqrt{3}$. ■

12. 1. јануар 2018. Г гр.

Дат је комплексан број $z = -1 - i$.

а) Одредити конјуговано комплексни број $\overline{z}$, модуо $|z|$, аргумент $\arg z$ и представити z и $\overline{z}$ у комплексној равни. Представити у комплексној равни бројеве $(\overline{z}\,)^3$, z^3, $\dfrac{\overline{z}}{z}$.

б) Одредити $w = \left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)^{2018}$. Шта је реалан део, а шта имагинаран део w?

12. 1. јануар 2018. Г гр.

Дат је комплексан број $z = -1 - i$.

Резултати. $\overline{z} = -1 + i$, $|z| = \sqrt{2}$,

$$\arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

$(\overline{z})^3 = 2 + 2i$, $z^3 = 2 - 2i$, $\dfrac{\overline{z}}{z} = -i$.

$$w = \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^{2018} = (-i)^{2018} = +i^{4\cdot 504+2} = i^2 = -1,$$

$\mathcal{R}e\ w = -1$, $\mathcal{I}m\ w = 0$. ■

13. 2. I кол 2017-8. 6. гр.

Решити једначине у $\mathbb{C}$:

а) $z^3 = 64$; **б)** $z^4 = 1$; **в)** $z^3 = -8i$.

13. **a)** $z^3 = 64$.

Решење. $z^3 - 64 = 0$ je разлика кубова

13. a) $z^3 = 64$.

Решење. $z^3 - 64 = 0$ je разлика кубова:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

13. a) $z^3 = 64$.

Решење. $z^3 - 64 = 0$ je разлика кубова:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$z^3 - 4^3 = (z - 4) \cdot (z^2 + 4z + 16) = 0$$

13. а) $z^3 = 64$.

Решење. $z^3 - 64 = 0$ је разлика кубова:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

$$z^3 - 4^3 = (z-4)\cdot(z^2+4z+16) = 0$$

$z - 4 = 0$ или $z^2 + 4z + 16 = 0$

13. а) $z^3 = 64.$

Решење. $z^3 - 64 = 0$ je разлика кубова:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

$$z^3 - 4^3 = (z-4)\cdot(z^2+4z+16) = 0$$

$z - 4 = 0$ или $z^2 + 4z + 16 = 0$

$z_0 = 4$ $\quad a = 1,\ b = 4,\ c = 16$

$$D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 16 = -48 < 0$$

13. а) $z^3 = 64.$

Решење. $z^3 - 64 = 0$ је разлика кубова:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

$$z^3 - 4^3 = (z-4)\cdot(z^2+4z+16) = 0$$

$z - 4 = 0$ или $z^2 + 4z + 16 = 0$

$z_0 = 4$

$$a = 1,\ b = 4,\ c = 16$$

$$D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 16 = -48 < 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

Решење. $z^3 - 64 = 0$ je разлика кубова:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

$$z^3 - 4^3 = (z-4)\cdot(z^2+4z+16) = 0$$

$z - 4 = 0$ или $z^2 + 4z + 16 = 0$

$z_0 = 4$ $a = 1,\ b = 4,\ c = 16$

$$D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 16 = -48 < 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{-4+i\sqrt{48}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = \frac{-4-i\sqrt{48}}{2} = -2 - 2\sqrt{3}i \quad \blacksquare$$

13. **б)** $z^4 = 1$.

Решење 1. $z^4 - 1 = 0$ $2\times$ разлика квадрата

13. б) $z^4 = 1$.

Решење 1. $z^4 - 1 = 0$ $2\times$ разлика квадрата

$$(z^2 - 1) \cdot (z^2 + 1) = 0$$

13. **б)** $z^4 = 1$.

Решење 1. $z^4 - 1 = 0$ $\quad 2\times$ разлика квадрата

$(z^2 - 1) \cdot (z^2 + 1) = 0$

$(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (z^2 + 1) = 0$

13. **б)** $z^4 = 1$.

Решење 1. $\quad z^4 - 1 = 0 \qquad$ $2\times$ разлика квадрата

$(z^2 - 1) \cdot (z^2 + 1) = 0$

$(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (z^2 + 1) = 0$

$z - 1 = 0$ или $z + 1 = 0$ или $z^2 + 1 = 0$

13. б) $z^4 = 1$.

Решење 1. $z^4 - 1 = 0$ $\quad$ $2\times$ разлика квадрата

$(z^2 - 1)\cdot(z^2 + 1) = 0$

$(z - 1)\cdot(z + 1)\cdot(z^2 + 1) = 0$

$z - 1 = 0$ или $z + 1 = 0$ или $z^2 + 1 = 0$

$z_0 = 1$ $\qquad$ $z_2 = -1$ $\qquad$ $z_1 = i \quad z_3 = -i$.

■

13. б) $z^4 = 1$.

Решење 2. $z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

компл.бр. $w = 1$ има $\rho = 1$ и $\varphi = 0$.

13. **б)** $z^4 = 1$.

Решење 2. $\quad z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

компл.бр. $w = 1$ има $\rho = 1$ и $\varphi = 0$.

Када то убацимо у формулу за n-те корене

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

13. **б)** $z^4 = 1$.

Решење 2. $z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

компл.бр. $w = 1$ има $\rho = 1$ и $\varphi = 0$.

Када то убацимо у формулу за n-те корене

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

добијамо $z_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0+2k\pi}{4} + i \sin \frac{0+2k\pi}{4}\right)$,

13. **б)** $z^4 = 1$.

Решење 2. $z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

компл.бр. $w = 1$ има $\rho = 1$ и $\varphi = 0$.

Када то убацимо у формулу за n-те корене

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \tfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

добијамо $z_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0+2k\pi}{4} + i \sin \frac{0+2k\pi}{4}\right)$,

тј. $z_k = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}$ за $k = 0, 1, 2, 3$.

13. б) $z^4 = 1.$

Решење 2. $z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

компл.бр. $w = 1$ има $\rho = 1$ и $\varphi = 0.$

Када то убацимо у формулу за n-те корене

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

добијамо $z_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0+2k\pi}{4} + i \sin \frac{0+2k\pi}{4}\right),$

тј. $z_k = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}$ за $k = 0, 1, 2, 3.$

$k = 0$: $z_0 = \cos \frac{0 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{0 \cdot \pi}{2},$ $z_0 = 1,$

13. б) $z^4 = 1$.

Решење 2. $z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

компл.бр. $w = 1$ има $\rho = 1$ и $\varphi = 0$.

Када то убацимо у формулу за n-те корене

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

добијамо $z_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\frac{0+2k\pi}{4} + i\sin\frac{0+2k\pi}{4}\right)$,

тј. $z_k = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}$ за $k = 0, 1, 2, 3$.

$k = 0$: $z_0 = \cos\frac{0\cdot\pi}{2} + i\sin\frac{0\cdot\pi}{2}$, $z_0 = 1$,

$k = 1$: $z_1 = \cos\frac{1\cdot\pi}{2} + i\sin\frac{1\cdot\pi}{2}$, $z_1 = i$, *Решење 2.* $z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

компл.бр. $w = 1$ има $\rho = 1$ и $\varphi = 0$.

Када то убацимо у формулу за n-те корене

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

добијамо $z_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0+2k\pi}{4} + i \sin \frac{0+2k\pi}{4}\right)$,

тј. $z_k = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}$ за $k = 0, 1, 2, 3$.

$k = 0$: $z_0 = \cos \frac{0 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{0 \cdot \pi}{2}$, $z_0 = 1$,

$k = 1$: $z_1 = \cos \frac{1 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{1 \cdot \pi}{2}$, $z_1 = i$,

$k = 2$: $z_2 = \cos \frac{2 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{2 \cdot \pi}{2}$, $z_2 = -1$, *Решење 2.* $z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

компл.бр. $w = 1$ има $\rho = 1$ и $\varphi = 0$.

Када то убацимо у формулу за n-те корене

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

добијамо $z_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0+2k\pi}{4} + i \sin \frac{0+2k\pi}{4} \right)$,

тј. $z_k = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}$ за $k = 0, 1, 2, 3$.

$k = 0$: $z_0 = \cos \frac{0 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{0 \cdot \pi}{2}$, $z_0 = 1$,

$k = 1$: $z_1 = \cos \frac{1 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{1 \cdot \pi}{2}$, $z_1 = i$,

$k = 2$: $z_2 = \cos \frac{2 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{2 \cdot \pi}{2}$, $z_2 = -1$,

$k = 3$: $z_3 = \cos \frac{3 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{3 \cdot \pi}{2}$, $z_3 = -i$.

$\blacksquare$

13. в) 2. I кол 2017-8. 6. гр. $z^3 = -8i$.

Решење. $z^3 = -8i \quad \Rightarrow \quad n = 3$

$w = -8i$ има $\rho = 8$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

13. в) 2. I кол 2017-8. 6. гр. $z^3 = -8i.$

Решење. $z^3 = -8i \quad \Rightarrow \quad n = 3$

$w = -8i$ има $\rho = 8$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}.$

То убацимо у формулу за n-те корене:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right),$$

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{(4k-1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4k-1)\pi}{6} \right) \quad \text{за } k = 0, 1, 2.$$

13. в) 2. I кол 2017-8. 6. гр. $z^3 = -8i.$

Решење. $z^3 = -8i \quad \Rightarrow \quad n = 3$

$w = -8i$ има $\rho = 8$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

То убацимо у формулу за n-те корене:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right),$$

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{(4k-1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4k-1)\pi}{6} \right) \quad \text{за } k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$: $\quad z_0 = 2\left(\cos \frac{(4 \cdot 0 - 1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4 \cdot 0 - 1)\pi}{6} \right),$

$z_0 = 2\left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right) \qquad z_0 = \sqrt{3} - i.$

Решење. $z^3 = -8i \quad \Rightarrow \quad n = 3$

$w = -8i$ има $\rho = 8$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

То убацимо у формулу за n-те корене:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right),$$

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{(4k-1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4k-1)\pi}{6} \right) \quad \text{за } k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$: $\quad z_0 = 2\left(\cos \frac{(4\cdot 0-1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4\cdot 0-1)\pi}{6} \right),$

$z_0 = 2\left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right) \quad z_0 = \sqrt{3} - i.$

$k = 1$: $\quad z_1 = 2\left(\cos \frac{(4\cdot 1-1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4\cdot 1-1)\pi}{6} \right),$

$z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad z_1 = 2i.$

Решење. $z^3 = -8i \quad \Rightarrow \quad n = 3$

$w = -8i$ има $\rho = 8$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

$$z_k = 2\left(\cos\frac{(4k-1)\pi}{6} + i\sin\frac{(4k-1)\pi}{6}\right) \quad \text{за } k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$: $\quad z_0 = 2\Big(\cos\frac{(4\cdot 0-1)\pi}{6} + i\sin\frac{(4\cdot 0-1)\pi}{6}\Big),$

$z_0 = 2\Big(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\Big) \qquad z_0 = \sqrt{3} - i.$

$k = 1$: $\quad z_1 = 2\Big(\cos\frac{(4\cdot 1-1)\pi}{6} + i\sin\frac{(4\cdot 1-1)\pi}{6}\Big),$

$z_1 = 2\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) \qquad z_1 = 2i.$

$k = 2$: $\quad z_2 = 2\Big(\cos\frac{(4\cdot 2-1)\pi}{6} + i\sin\frac{(4\cdot 2-1)\pi}{6}\Big),$

$z_2 = 2\Big(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\Big) \qquad z_2 = -\sqrt{3} - i.$

■

КРАЈ ЧАСА