др Владимир Балтић

baltic@viser.edu.rs

05. термин

Системи линеарних једначина

Системи линеарних једначина

Теоријски увод

Решити систем = наћи опште решење, тј. одредити СВА решења система.

Решити систем = наћи опште решење, тј. одредити СВА решења система.

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација једначина система:

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација једначина система:

1° замена места две једначине;

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација једначина система:

1° замена места две једначине;

2° множење једначине бројем $k \neq 0$;

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација једначина система:

1° замена места две једначине;

2° множење једначине бројем $k \neq 0$;

3° додавање једначине помножене са k некој другој једначини.

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација једначина система:

1° замена места две једначине;

2° множење једначине бројем $k \neq 0$;

3° додавање једначине помножене са k некој другој једначини.

Имамо 2 карактеристична случаја:

Имамо 2 карактеристична случаја:

$$0 = b \quad \lightning$$

где је $b \neq 0$ – тада кажемо да систем *није сагласан*, тј. да *нема решења*;

Имамо 2 карактеристична случаја:

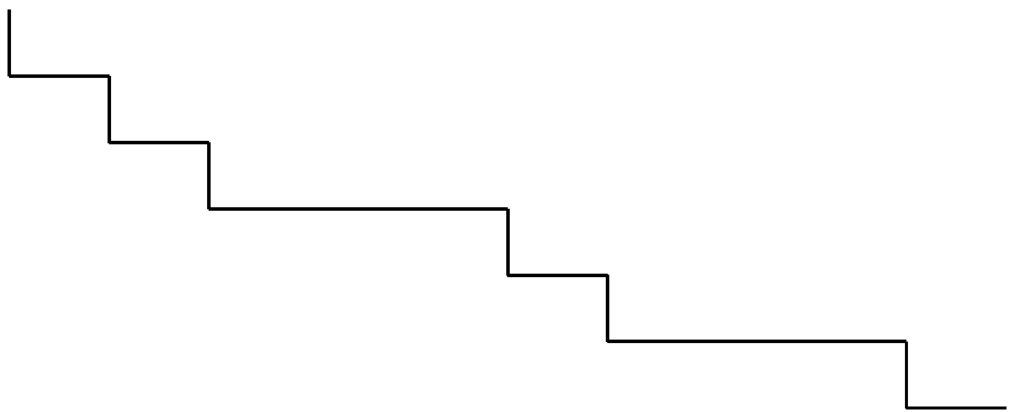
$$0 = b$$

где је $b \neq 0$ – тада кажемо да систем *није сагласан*, тј. да *нема решења*;

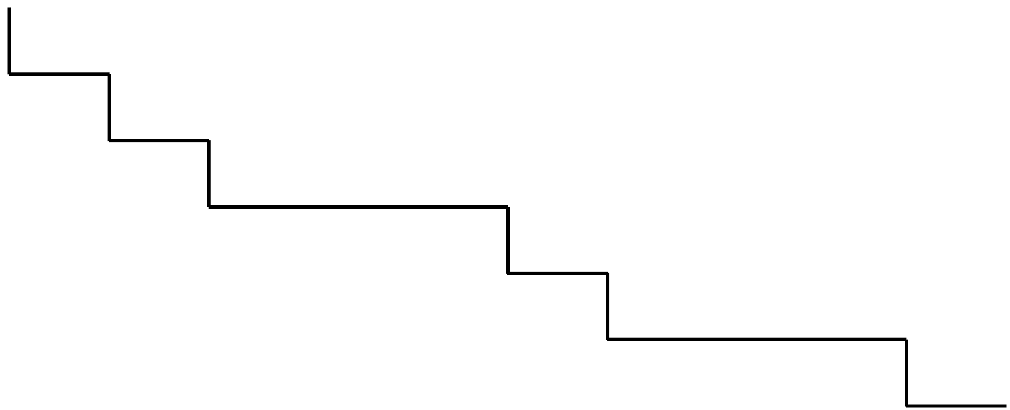
$$\xcancel{0 = 0}$$

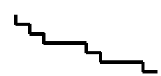
ову једначину избришемо и наставимо са решавањем система!

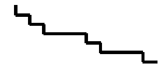
Овим трансформацијама полазни систем сводимо на систем у *степенастом облику*:

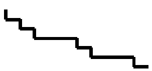


Овим трансформацијама полазни систем сводимо на систем у *степенастом облику*:



Ако смо систем свели на  облик тада је он *сагласан*, тј. има решења (једно или више).

Ако смо систем свели на  облик тада је он *сагласан*, тј. има решења (једно или више).

Променљиве које су на почетку једначина у  су *везане* а остале су *слободне* променљиве (њима додељујемо вредности параметара).

Ако смо систем свели на облик тада је он *сагласан*, тј. има решења (једно или више).

Променљиве које су на почетку једначина у су *везане* а остале су *слободне* променљиве (њима додељујемо вредности параметара).

Степенаст систем са n променљивих:
r везаних и $n-r$ слободних.

Степенаст систем са n променљивих:
r везаних и $n - r$ слободних.

- $r = n$ систем има *јединствено решење*.

Степенаст систем са n промењивих:

r везаних и $n - r$ слободних.

- $r = n$ систем има *јединствено решење*.
- $r < n$ систем има *вишеструко решење* (или *бесконачно много решења*) које зависи од $n - r$ параметара.

Кронекер-Капелијева теорема

Посматрајмо систем:

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Кронекер-Капелијева теорема

Посматрајмо систем:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Кронекер-Капелијева теорема

Посматрајмо систем:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Теорема 1. **Кронекер-Капелијева теорема.**
Систем линеарних једначина је сагласан акко

$$r(A) = r(B).$$

Теорема 1. **Кронекер-Капелијева теорема.** Систем линеарних једначина је сагласан акко

$$r(A) = r(B).$$

1° $r(A) < r(B)$ систем нема решења;

Теорема 1. Кронекер-Капелијева теорема. Систем линеарних једначина је сагласан акко

$$r(A) = r(B).$$

1° $\quad r(A) < r(B)$ систем нема решења;

2° $\quad r(A) = r(B) = n$ систем има јединствено решење;

Теорема 1. **Кронекер-Капелијева теорема.** Систем линеарних једначина је сагласан акко

$$r(A) = r(B).$$

1° $r(A) < r(B)$ систем нема решења;

2° $r(A) = r(B) = n$ систем има јединствено решење;

3° $r(A) = r(B) < n$ систем има вишеструко решење које зависи од $n - r(A)$ параметара.

Крамерове формуле

Систем од n једначина са n променљивих: можемо решавати помоћу детерминанти.

Крамерове формуле

Систем од n једначина са n променљивих: можемо решавати помоћу детерминанти.

Детерминанта матрице система

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

је *детерминанта система*.

Детерминанте

$$\Delta_i = \det B_i, \quad \text{за} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Детерминанте

$$\Delta_i = \det B_i, \quad \text{за} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Матрица B_i се добија од матрице A заменом i-те колоне колоном слободних чланова

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$$

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење.

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење. Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; \ldots \; , \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење. Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots\ , \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta = 0$ и неко $\Delta_i \neq 0$ систем нема решења.

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење. Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots \ , \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta = 0$ и неко $\Delta_i \neq 0$ систем нема решења.

- $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ тада

???

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење. Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots\ , \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta = 0$ и неко $\Delta_i \neq 0$ систем нема решења.

- $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ тада

???

нема решења или **вишеструко решење**

- $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење. Оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots\ , \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- $\Delta = 0$ и неко $\Delta_i \neq 0$ систем нема решења.

- $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ тада

???

нема решења или **вишеструко решење**

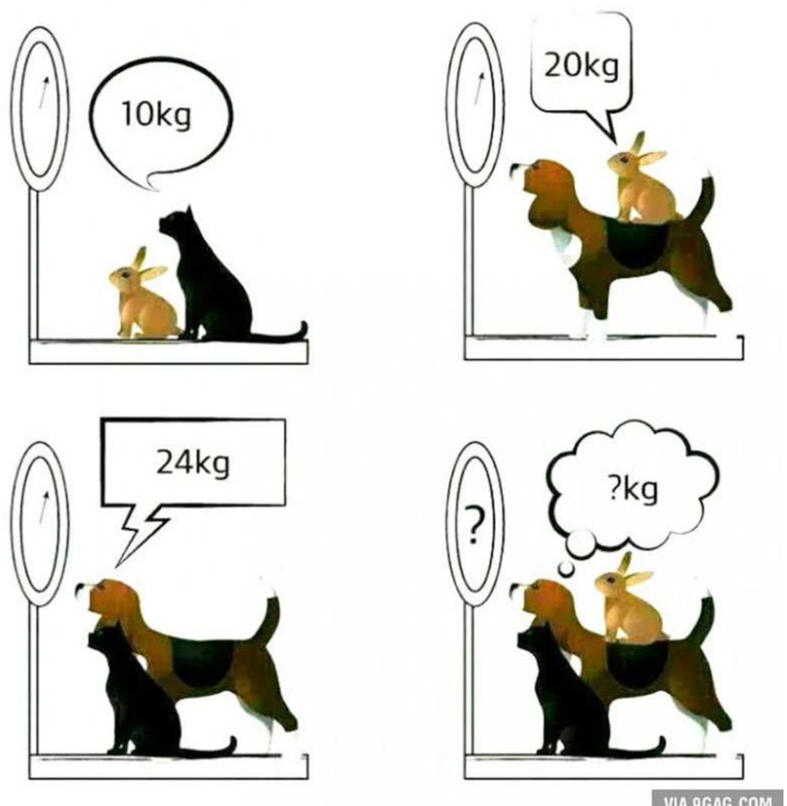
МОРА Гаусовим сис. ел.

Задаци

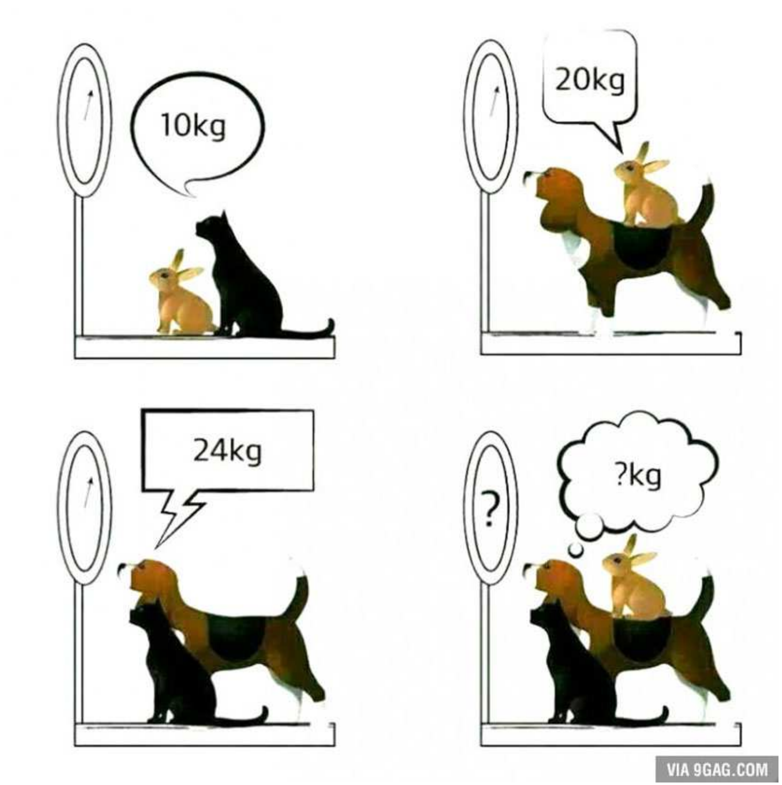
1. 6. I кол 2017-8. 1. гр.

Ако су зец и мачка тешки $10kg$, зец и пас $20kg$, мачка и пас $24kg$, колико су тешки заједно зец, мачка и пас?

1. 6. I кол 2017-8. 1. гр.



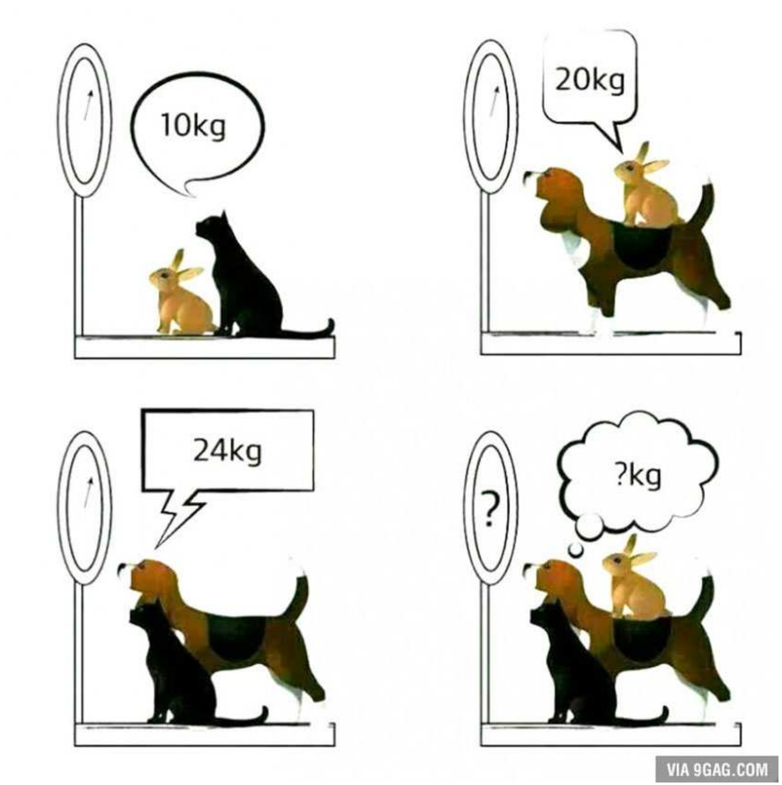
1.



метод пробања:

$$\text{зец } 1kg \Rightarrow \begin{array}{r} \text{мачка } 9kg \\ \text{пас } 19kg \end{array} \Rightarrow \text{мачка и пас } 28kg \ \lightning$$

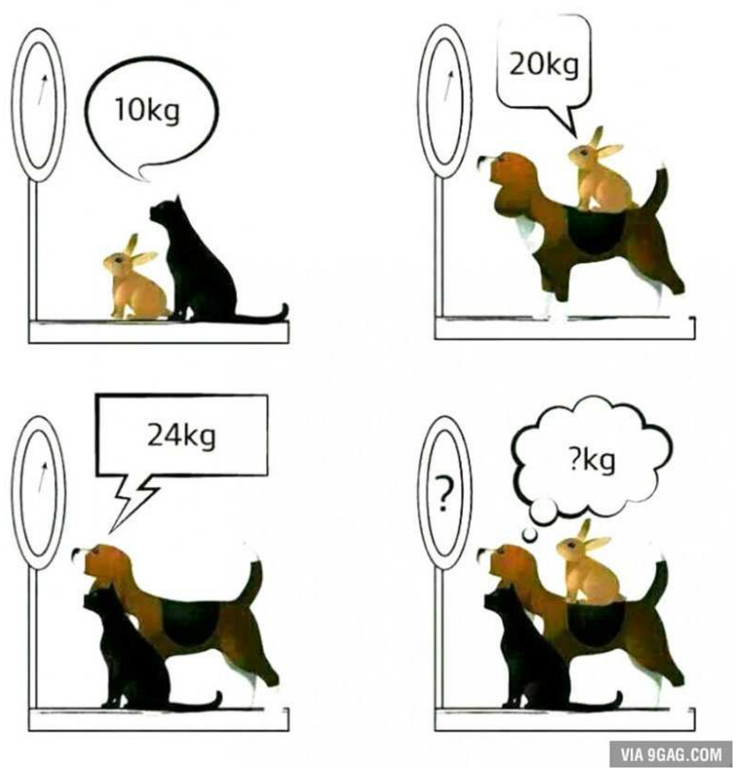
1.



метод пробања:

$$\text{зец } 2kg \Rightarrow \begin{array}{r}\text{мачка } 8kg\\ \text{пас } 18kg\end{array} \Rightarrow \text{мачка и пас } 26kg \ \lightning$$

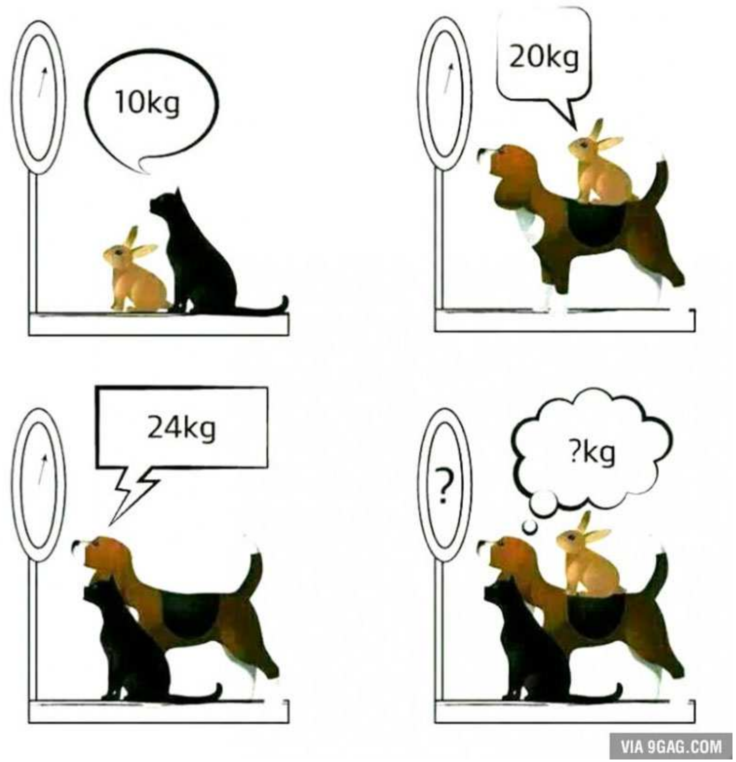
1.



метод пробања:

$$\text{зец } 3kg \Rightarrow \begin{array}{r} \text{мачка } 7kg \\ \text{пас } 17kg \end{array} \Rightarrow \text{мачка и пас } 24kg \checkmark$$

1.

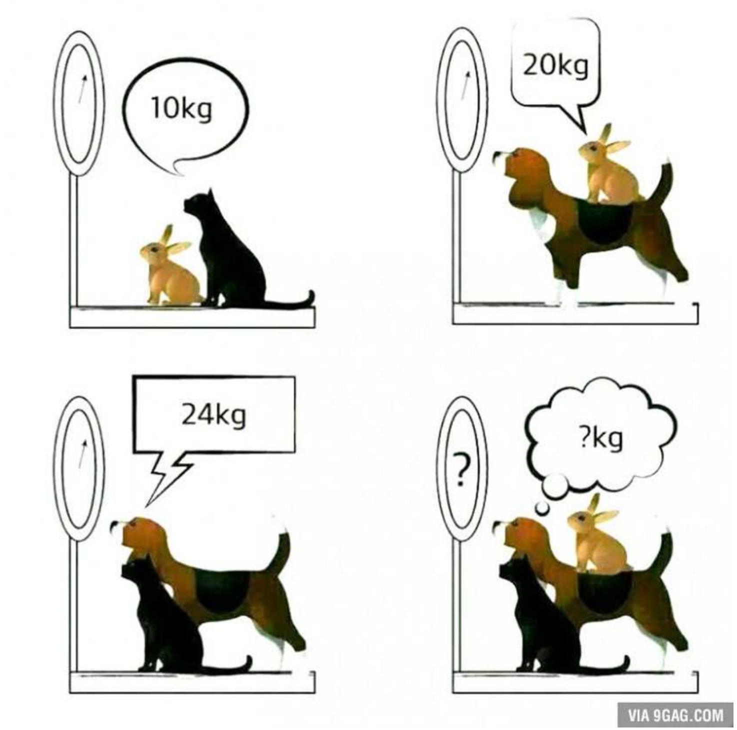


метод пробања:

$$\text{зец } 3kg \Rightarrow \begin{array}{r}\text{мачка } 7kg\\ \text{пас } 17kg\end{array} \Rightarrow \text{мачка и пас } 24kg \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{зец, мачка и пас} = 27kg.$$

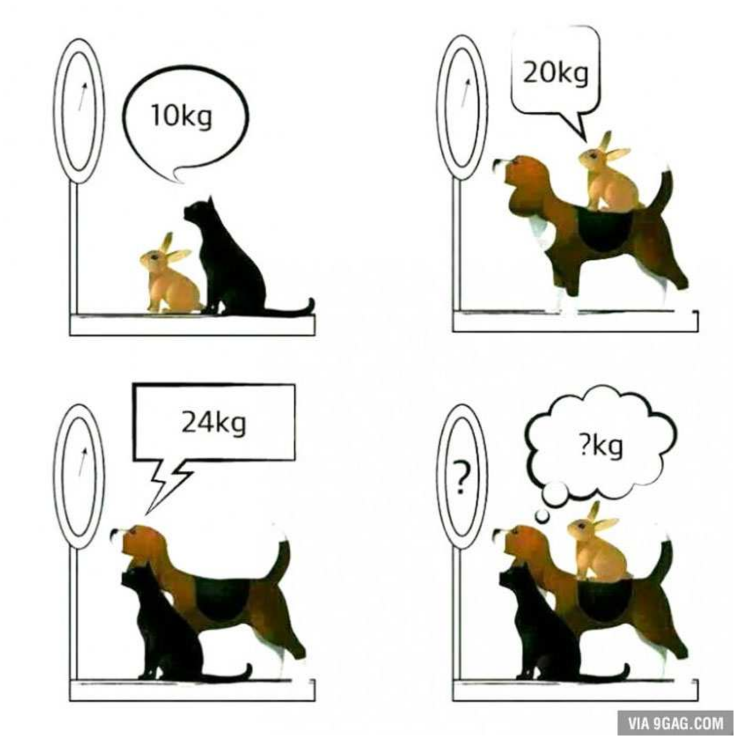
1.



преко система:

$$z + m = 10kg,\ z + p = 20kg,\ m + p = 24kg$$

1.



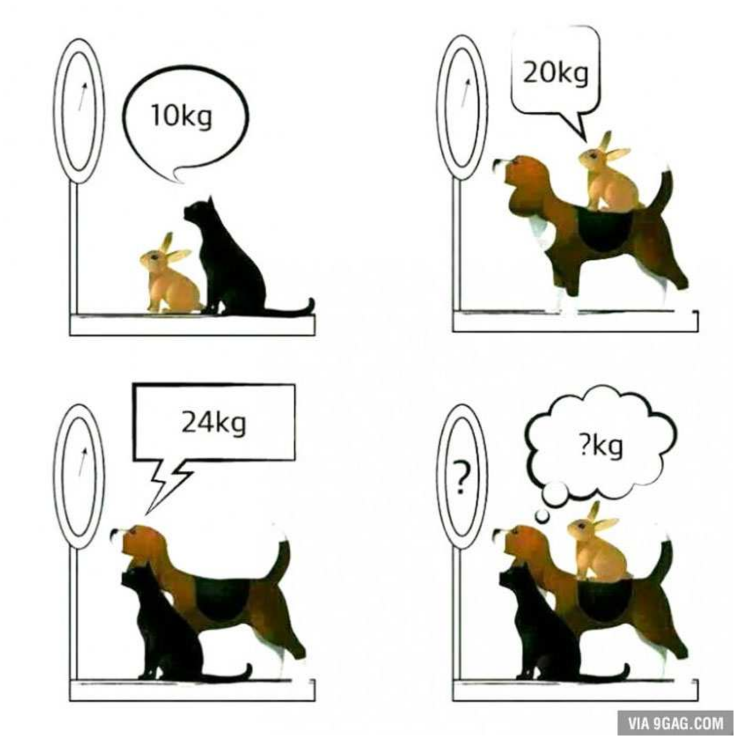
преко система:

$z + m = 10kg, \; z + p = 20kg, \; m + p = 24kg$

решимо систем $\Rightarrow z = 3kg, \; m = 7kg, \; p = 17kg$

$\Rightarrow z + m + p = 27kg.$

1.



преко система (брже):

$z + m = 10kg, \; z + p = 20kg, \; m + p = 24kg$

саберемо све једначине $\Rightarrow 2z + 2m + 2p = 54kg$

$\Rightarrow z + m + p = 27kg.$

2. 6. I кол 2017-8. 6. гр.

Јова има два пута више браће него сестара, а његова сестра Милена има пет пута више браће него сестара. Колико у тој породици има синова, а колико кћери?

2. 6. I кол 2017-8. 6. гр.

Јова има два пута више браће него сестара, а његова сестра Милена има пет пута више браће него сестара. Колико у тој породици има синова, а колико кћери?

Решење.

b – број браће у породици

s – број сестара у породици

2. 6. I кол 2017-8. 6. гр.

Јова има два пута више браће него сестара, а његова сестра Милена има пет пута више браће него сестара. Колико у тој породици има синова, а колико кћери?

Решење.

b – број браће у породици

s – број сестара у породици

$b - 1 = 2 \cdot s$

2. 6. I кол 2017-8. 6. гр.

Јова има два пута више браће него сестара, а његова сестра Милена има пет пута више браће него сестара. Колико у тој породици има синова, а колико кћери?

Решење.

b – број браће у породици

s – број сестара у породици

$b - 1 = 2 \cdot s$

$b = 5 \cdot (s - 1)$

2. 6. I кол 2017-8. 6. гр.

Јова има два пута више браће него сестара, а његова сестра Милена има пет пута више браће него сестара. Колико у тој породици има синова, а колико кћери?

Решење.

b – број браће у породици

s – број сестара у породици

$$\begin{aligned} b - 1 &= 2 \cdot s \\ b &= 5 \cdot (s - 1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} b - 2s &= 1 \\ b - 5s &= -5 \end{aligned}$$

2. 6. I кол 2017-8. 6. гр.

Јова има два пута више браће него сестара, а његова сестра Милена има пет пута више браће него сестара. Колико у тој породици има синова, а колико кћери?

Решење.

b – број браће у породици

s – број сестара у породици

$$\begin{aligned} b-1&=2\cdot s\\ b&=5\cdot(s-1)\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{rcrcr} b & - & 2s & = & 1\\ b & - & 5s & = & -5\end{array}$$

Синова има $b=5$, а кћери $s=2$. ■

3. Решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 6 \end{array}$$

1) матричном методом;

2) Гаусовим системом елиминације;

3) Крамеровим правилом.

4) применом Кронекер-Капелијеве теореме.

Решење 1. МАТРИЧНА МЕТОДА

Матрица система $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(за њу смо одредили A^{-1} на II двочасу).

Решење 1. МАТРИЧНА МЕТОДА

Матрица система $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(за њу смо одредили A^{-1} на II двочасу).

Матрица непознатих $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Решење 1. МАТРИЧНА МЕТОДА

Матрица система $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(за њу смо одредили A^{-1} на II двочасу).

Матрица непознатих $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Матрица слободних чланова $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Матрична једначина $A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Матрична једначина $A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + y - z \\ 2x + y \\ x - y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

што је наш систем.

Решење $A \cdot X = B$ је

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

Решење $A \cdot X = B$ je

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Решење $A \cdot X = B$ je

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

тј. решење система je $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$. ■

Решење 2. ГАУСОВ СИСТЕМ ЕЛИМИН.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & = & -4 & \\ 2x & + & y & & & = & 0 & \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ x & - & y & + & z & = & 6 & \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array}$$

Решење 2. ГАУСОВ СИСТЕМ ЕЛИМИН.

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & y & - & z & = & -4 & \\
2x & + & y & & & = & 0 & \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\
x & - & y & + & z & = & 6 & \mathrm{III} - \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & y & - & z & = & -4 & \\
 & - & y & + & 2z & = & 8 & \\
 & - & 2y & + & 2z & = & 10 & \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{II}
\end{array}$$

Решење 2. ГАУСОВ СИСТЕМ ЕЛИМИН.

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & y & - & z & = & -4 & \\
2x & + & y & & & = & 0 & \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\
x & - & y & + & z & = & 6 & \mathrm{III} - \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & y & - & z & = & -4 & \\
 & - & y & + & 2z & = & 8 & \\
 & - & 2y & + & 2z & = & 10 & \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & - & z & = & -4 \\
 & - & y & + & 2z & = & 8 \\
 & & & - & 2z & = & -6
\end{array}$$

Решење 2. ГАУСОВ СИСТЕМ ЕЛИМИН.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & = & -4 & \\ 2x & + & y & & & = & 0 & \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ x & - & y & + & z & = & 6 & \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & = & -4 & \\ & - & y & + & 2z & = & 8 & \\ & - & 2y & + & 2z & = & 10 & \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

x, y и z су везане $\Rightarrow$ сис. има јединствено реш.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

Из III:

$$z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

Из III:

$$z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

То у II:

$$-y + 2 \cdot 3 = 8 \;\Rightarrow\; y = -2.$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & - & z & = & -4 \\
 & - & y & + & 2z & = & 8 \\
 & & & - & 2z & = & -6
\end{array}$$

Из III:

$$z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

То у II:

$$-y + 2 \cdot 3 = 8 \;\Rightarrow\; y = -2.$$

y и z убацимо у I:

$$x + (-2) - 3 = -4 \;\Rightarrow\; x = 1.$$

Из III:

$$z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

То у II:

$$-y + 2 \cdot 3 = 8 \;\Rightarrow\; y = -2.$$

y и z убацимо у I:

$$x + (-2) - 3 = -4 \;\Rightarrow\; x = 1.$$

ЗАКЉУЧАК:

$(x, y, z) = (1, -2, 3).$ ■

Решење 3. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 6 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

Решење 3. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 6 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

Решење 3. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

$\Delta = 2 \neq 0 \;\Rightarrow$ систем има јединствено решење:

Решење 3. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

$\Delta = 2 \neq 0 \;\Rightarrow$ систем има јединствено решење:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -2 \text{ и } z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3. \qquad \blacksquare$$

Решење 4. КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА Т.

Гаусов систем елиминације са матричним записом.

Решење 4. КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА Т.

Гаусов систем елиминације са матричним записом.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \sim$$

Решење 4. КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА Т.

Гаусов систем елиминације са матричним записом.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

Решење 4. КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА Т.

Гаусов систем елиминације са матричним записом.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

Проширеној матрици система

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

одговара систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

Проширеној матрици система

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

одговара систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

$r(A) = r(B) = 3$ (број променљивих)

$\Rightarrow$ решење је јединствено.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \quad \mathrm{III} : (-2) \qquad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} : (-2) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{III} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} : (-2) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{III} \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ (-1) \cdot \mathrm{II} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Матрица $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ је еквивалентна са

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3,$$

што је решење система. $\blacksquare$

4. Испитати сагласност и решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2. \end{array}$$

Решење 1. ПОМОЋУ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Решење 1. ПОМОЋУ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$\Delta = 0$ и $\Delta_x = 5 \neq 0$ $\Rightarrow$ систем нема решења. ∎

Решење 2. ГАУСОВ СИС. ЕЛИМИНАЦИЈЕ

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

Решење 2. ГАУСОВ СИС. ЕЛИМИНАЦИЈЕ

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
3x & + & 3y & + & z & = & 2 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\
 & & 6y & - & 8z & = & -1 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II}
\end{array}
$$

Решење 2. ГАУСОВ СИС. ЕЛИМИНАЦИЈЕ

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
3x & + & 3y & + & z & = & 2 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\
 & & 6y & - & 8z & = & -1 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & -1
\end{array}$$

Решење 2. ГАУСОВ СИС. ЕЛИМИНАЦИЈЕ

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\ & & 6y & - & 8z & = & -1 & \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & -1 & \lightning \end{array}$$

Систем нема решења. ∎

5. Испитати сагласност и решити систем

$$\begin{aligned} x &- y &+ 3z &= 1\\ x &+ 2y &- z &= 1\\ 3x &+ 3y &+ z &= 3. \end{aligned}$$

5. Испитати сагласност и решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Решење. Како је

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

Решење. Како је

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

систем <u>МОРАМО</u> решавати Гаусовим системом елиминације.

$$
\begin{array}{rcrcrcll}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\
3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\
3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\
 & & 6y & - & 8z & = & 0 & \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rcrcrcll}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcll}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\
 & & 6y & - & 8z & = & 0 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \\
\hline
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\
 & & 6y & - & 8z & = & 0 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \\
\hline
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\
\hline
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \\
\hline
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\
 & & 6y & - & 8z & = & 0 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \\
\hline
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 & \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\
\hline
x & - & y & + & 3z & = & 1 & \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0
\end{array}
$$

x и y везане променљиве

z слободна променљива

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

x и y везане променљиве

z слободна променљива:

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

x и y везане променљиве

z слободна променљива:

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Из II:

$$3y - 4\alpha = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{4}{3}\,\alpha.$$

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & - & y & + & 3z & = & 1 \\
 & & 3y & - & 4z & = & 0
\end{array}
$$

$$z = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Из II:

$$3y - 4\alpha = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{4}{3}\,\alpha.$$

Из I:

$$x - \frac{4}{3}\alpha + 3\alpha = 1 \;\Rightarrow\; x = 1 - \frac{5}{3}\,\alpha.$$

Из II:

$$3y - 4\alpha = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{4}{3}\,\alpha.$$

Из I:

$$x - \frac{4}{3}\alpha + 3\alpha = 1 \;\Rightarrow\; x = 1 - \frac{5}{3}\,\alpha.$$

ЗАКЉУЧАК:

Систем има вишеструко решење које зависи од 1 параметра:

$$(x, y, z) = \left(1 - \frac{5}{3}\,\alpha, \frac{4}{3}\,\alpha, \alpha\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Напомена. Како је α произвољан реалан број, могли смо узети

$$z = 3t, \quad t \in \mathbb{R}$$

и добили би ”лепше” решење

$$(x, y, z) = (1 - 5t, 4t, 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

6. Испитати сагласност и решити систем

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 3. \end{array}$$

6. Испитати сагласност и решити систем

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Решење. Како је

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

Решење. Како је

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

систем <u>МОРАМО</u> решавати Гаусовим системом елиминације.

$$
\begin{array}{ccccccccl}
x & + & y & + & z & = & 1 & & \\
x & + & y & + & z & = & 2 & & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\
x & + & y & + & z & = & 3 & & \mathrm{III}-\mathrm{I}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccl}
x & + & y & + & z & = & 1 & & \\
x & + & y & + & z & = & 2 & & \color{blue}{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \\
x & + & y & + & z & = & 3 & & \color{blue}{\mathrm{III}-\mathrm{I}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & z & = & 1 \\
 & & & & 0 & = & 1 \\
 & & & & 0 & = & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccl}
x & + & y & + & z & = & 1 & & \\
x & + & y & + & z & = & 2 & & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\
x & + & y & + & z & = & 3 & & \mathrm{III}-\mathrm{I}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccl}
x & + & y & + & z & = & 1 & & \\
 & & & & 0 & = & 1 & & \lightning \\
 & & & & 0 & = & 2 & & \lightning
\end{array}
$$

ЗАКЉУЧАК:

Систем нема решења. $\blacksquare$

7. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0. \end{array}$$

7. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0. \end{array}$$

Решење.

Систем има 3 једначине и 4 непознате

7. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0. \end{array}$$

Решење.

Систем има 3 једначине и 4 непознате

$\Rightarrow$ НЕ МОЖЕ преко детерминанти,

7. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0. \end{array}$$

Решење.

Систем има 3 једначине и 4 непознате

$\Rightarrow$ НЕ МОЖЕ преко детерминанти,

$\Rightarrow$ НЕ МОЖЕ матричном методом,

Решење.

Систем има 3 једначине и 4 непознате

$\Rightarrow$ НЕ МОЖЕ преко детерминанти,

$\Rightarrow$ НЕ МОЖЕ матричном методом,

$\Rightarrow$ МОРА Гаусовим системом елиминације

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 & \\
6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 & \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 \qquad \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0 \qquad \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcll}
3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 & \\
6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 & \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\
9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0 & \mathrm{III} - 3\cdot\mathrm{I}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 & & \boxed{(4-a)}\,y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0
\end{array}
$$

2 случаја:

1° $a \neq 4$ и **2°** $a = 4$

1° За $a \neq 4$:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0
\end{array}
$$

Систем у степенастом облику

1° За $a \neq 4$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\ & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0 \end{array}$$

Систем у степенастом облику

x, y и z везане

u слободна променљива:

$$u = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\ & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0 \end{array}$$

$$u = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{2-3a}{12}\,t$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0
\end{array}$$

$$u = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{2-3a}{12}\, t$$

$$y = \frac{1}{2}\, t$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\
 & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & + & (2-3a)u & = & 0
\end{array}
$$

$$u = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{2-3a}{12}\,t, \qquad y = \frac{1}{2}\,t$$

$$x = \frac{3a-22}{36}\,t.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{2-3a}{12}\,t$$

$$y = \frac{1}{2}\,t$$

$$x = \frac{3a-22}{36}\,t.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{3a-22}{36}\,t, \frac{1}{2}\,t, \frac{2-3a}{12}\,t, t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2° За $a = 4$ систем се своди на:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 & \\ & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 & \\ & & & - & 12z & - & 10u & = & 0 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

2° За $a = 4$ систем се своди на:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\ & & & - & 12z & - & 10u & = & 0 \quad \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \\ \hline 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

2° За $a = 4$ систем се своди на:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 & \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 & \\
 & & & - & 12z & - & 10u & = & 0 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \\
\hline
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 & \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 & \\
 & & & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} & \\
\hline
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 & \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 &
\end{array}$$

2° За $a = 4$ систем се своди на:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 & \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 & \\
 & & & - & 12z & - & 10u & = & 0 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\
 & & & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0
\end{array}$$

Систем у степенастом облику

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0
\end{array}
$$

Систем у степенастом облику

x и z везане

y и u слободне промењиве:

$$y = t, \quad u = p, \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0
\end{array}
$$

$$y = t, \quad u = p, \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = -\frac{5}{6}\,p$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \end{array}$$

$$y = t, \quad u = p, \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = -\frac{5}{6}\,p$$

$$x = \frac{2}{3}\,t + \frac{1}{18}\,p.$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\ & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \end{array}$$

$$y = t, \quad u = p, \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = -\frac{5}{6}\,p$$

$$x = \frac{2}{3}\,t + \frac{1}{18}\,p.$$

$$(x, y, z, u) = \left(\tfrac{2}{3}\,t + \tfrac{1}{18}\,p, t, -\tfrac{5}{6}\,p, p\right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 4$ има бесконачно много решења која зависе од 1 параметра:

$$(x,y,z,u)=\left(\frac{3a-22}{36}\,t,\ \frac{1}{2}\,t,\ \frac{2-3a}{12}\,t,\ t\right),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

2° За $a = 4$ има бесконачно много решења која зависе од 2 параметра:

$$(x,y,z,u)=\left(\frac{2}{3}\,t+\frac{1}{18}\,p,\ t,\ -\frac{5}{6}\,p,\ p\right),\qquad t,p\in\mathbb{R}.$$

$\blacksquare$

8. У зависности од $a, b \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 4x & + & 3y & + & az & = & 0 \\ x & - & 3y & + & bz & = & a-2. \end{array}$$

Решење.

$$\begin{array}{rcrcrcc}
2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
4x & + & 3y & + & az & = & 0 \\
x & - & 3y & + & bz & = & a-2
\end{array}$$

Решење.

$$\begin{array}{rcrcrcc}
2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
4x & + & 3y & + & az & = & 0 \\
x & - & 3y & + & bz & = & a-2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcc l}
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
2x & - & y & + & 3z & = & 2 & \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\
4x & + & 3y & + & az & = & 0 & \mathrm{III} - 4\cdot\mathrm{I} \\
x & - & 3y & + & bz & = & a-2 & \mathrm{IV} - \mathrm{I}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
2x & - & y & + & 3z & = & 2 & \color{blue}{\mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}} \\
4x & + & 3y & + & az & = & 0 & \color{blue}{\mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{I}} \\
x & - & 3y & + & bz & = & a-2 & \color{blue}{\mathrm{IV} - \mathrm{I}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 & \\
 & - & 5y & + & (a-4)z & = & 4 & \color{blue}{\mathrm{III} - \mathrm{II}} \\
 & - & 5y & + & (b-1)z & = & a-1 & \color{blue}{\mathrm{IV} - \mathrm{II}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcll}
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
2x & - & y & + & 3z & = & 2 & \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
4x & + & 3y & + & az & = & 0 & \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{I} \\
x & - & 3y & + & bz & = & a-2 & \mathrm{IV} - \mathrm{I} \\
\hline
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 & \\
 & - & 5y & + & (a-4)z & = & 4 & \mathrm{III} - \mathrm{II} \\
 & - & 5y & + & (b-1)z & = & a-1 & \mathrm{IV} - \mathrm{II} \\
\hline
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 & \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 & \\
 & & & & (b-2)z & = & a-5 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & + & 2y & + & & z & = & -1 \\
& - & 5y & + & & z & = & 4 \\
& & & & \boxed{(a-5)} & z & = & 0 \\
& & & & \boxed{(b-2)} & z & = & \boxed{(a-5)}
\end{array}
$$

Имамо 3 случаја:

$\mathbf{1}^\circ\ a \neq 5 \quad \mathbf{2}^\circ\ a = 5, b \neq 2 \quad \mathbf{3}^\circ\ a = 5, b = 2.$

$\mathbf{1^\circ}$ За $a \neq 5$:

$$\begin{array}{rcrcrcll}
x & + & 2y & + & z & = & -1 & \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 & \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 & \\
 & & & & (b-2)z & = & a-5 & \mathrm{IV} - \frac{b-2}{a-5} \cdot \mathrm{III}
\end{array}$$

1° За $a \neq 5$:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 \\
 & & & & (b-2)z & = & a-5 \quad \mathrm{IV} - \frac{b-2}{a-5} \cdot \mathrm{III}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & a-5
\end{array}$$

1° За $a \neq 5$:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 \\
 & & & & (b-2)z & = & a-5 \quad \mathrm{IV} - \frac{b-2}{a-5} \cdot \mathrm{III}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & a-5 \quad \lightning
\end{array}$$

Систем нема решења.

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \\ & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \\ & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

Систем у степенастом облику

x, y и z везане променљиве

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & & & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & & & z & = & 4 \\ & & & & (b-2) & & z & = & 0 \end{array}$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{0}{b-2} = 0$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & + & 2y & + & & z & = & -1 \\
& - & 5y & + & & z & = & 4 \\
& & & & (b-2) & z & = & 0
\end{array}
$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{0}{b-2} = 0$$

$$y = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & (b-2)z & = & 0 \end{array}$$

Враћањем уназад добијамо:

$$z = \frac{0}{b-2} = 0$$

$$y = -\frac{4}{5}$$

$$x = \frac{3}{5}.$$

3° За $a = 5$ и $b = 2$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

3° За $a = 5$ и $b = 2$:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4
\end{array}$$

3° За $a = 5$ и $b = 2$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \\ & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \\ & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & z & = & 4 \end{array}$$

Систем у степенастом облику

x и y везане

z слободна:

$$z = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4
\end{array}
$$

$$z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$y = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\,t$$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4
\end{array}
$$

$$z = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Враћањем уназад добијамо:

$$y = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\,t$$

$$x = \frac{3}{5} - \frac{7}{5}\,t.$$

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 5$ систем нема решења.

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 5$ систем нема решења.

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$, систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$.

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 5$ систем нема решења.

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$, систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$.

3° За $a = 5$ и $b = 2$ систем има вишеструко решење које зависи од једног параметра
$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}t, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}t, t\right), \ t \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

9. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2. \end{array}$$

Решење. Ово је систем 3×3 па решавамо преко детерминанти

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Решење. Ово је систем 3×3 па решавамо преко детерминанти

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{matrix} =$$

Решење. Ово је систем 3×3 па решавамо преко детерминанти

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{matrix} =$$

$$\Big(a^3 + 1 + 1\Big) - \Big(a + a + a\Big) = a^3 - 3a + 2.$$

Решење. Ово је систем 3×3 па решавамо преко детерминанти

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{cc} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{array} = a^3 - 3a + 2$$

Али би ово требало факторисати!

Боље да Δ рачунамо преко особина дет.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \color{blue}{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \\ \color{blue}{\mathrm{III}-\mathrm{I}} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \cdot \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \color{blue}{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}} \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II-I} \\ \mathrm{III-I} \end{array} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \cdot \underset{\mathrm{I+II+III}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \cdot \underset{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \cdot (a+2) \cdot 1 \cdot 1 = (a-1)^2(a+2).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II-I} \\ \mathrm{III-I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \cdot \underset{\mathrm{I+II+III}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \cdot (a+2) \cdot 1 \cdot 1 = (a-1)^2(a+2).$$

Имамо 3 случаја:

$\mathbf{1}^\circ$ $a \neq 1, -2$ $\qquad$ $\mathbf{2}^\circ$ $a = -2$ $\qquad$ $\mathbf{3}^\circ$ $a = 1$.

За $\mathbf{1}^\circ$ $a \neq 1, -2$ је $\boldsymbol{\Delta} \neq 0$ $\Rightarrow$ сис. има јед. реш.

За $\mathbf{1^\circ}$ $a \neq 1, -2$ је $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ сис. има јед. реш.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

За $\mathbf{1^\circ}$ $a \neq 1, -2$ је $\Delta \neq 0 \;\Rightarrow$ сис. има јед. реш.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

За $\mathbf{1^\circ}$ $a \neq 1, -2$ је $\Delta \neq 0$ $\Rightarrow$ сис. има јед. реш.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2}.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

Систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right).$$

За $\mathbf{2}^\circ$ $a = -2$ је

$\Delta = 0$ и $\Delta_y = 9 \neq 0$ $\Rightarrow$ систем нема решења.

3a $\mathbf{3}^\circ$ $a = 1$ je

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \qquad ???$$

3a $\mathbf{3^\circ}$ $a = 1$ je

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \qquad ???$$

$$\begin{array}{ccccccccl} x & + & y & + & z & = & 1 & \\ x & + & y & + & z & = & 1 & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ x & + & y & + & z & = & 1 & \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array}$$

3a $\mathbf{3}^\circ$ $a = 1$ je

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \qquad ???$$

$$\begin{array}{ccccccccl}
x & + & y & + & z & = & 1 & & \\
x & + & y & + & z & = & 1 & & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
x & + & y & + & z & = & 1 & & \mathrm{III} - \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & z & = & 1 \\
 & & & & 0 & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

3a $\mathbf{3}^\circ$ $a = 1$ je

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \qquad ???$$

$$\begin{array}{ccccccccl}
x & + & y & + & z & = & 1 & & \\
x & + & y & + & z & = & 1 & & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
x & + & y & + & z & = & 1 & & \mathrm{III} - \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & z & = & 1 \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0} \\
 & & & & \cancel{0} & \cancel{=} & \cancel{0}
\end{array}$$

$$x + y + z = 1$$

$$x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 1$$

Систем у степенастом облику

x везана

y и z слободна:

$$y = \alpha, \quad z = \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 1$$

Систем у степенастом облику

x везана

y и z слободна:

$$y = \alpha, \quad z = \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Из I:

$$x = 1 - \alpha - \beta$$

$$x \quad + \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 1$$

Систем у степенастом облику

x везана

y и z слободна:

$$y = \alpha, \quad z = \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Из I:

$$x = 1 - \alpha - \beta$$

$$(x, y, z) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 1, -2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$.

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 1, -2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$.

2° За $a = -2$, систем нема решења.

ЗАКЉУЧАК:

1° За $a \neq 1, -2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$.

2° За $a = -2$, систем нема решења.

3° За $a = 1$ систем има вишеструко решење које зависи од два параметра

$(x, y, z) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

10. *4. писмени ЕкоФ, јануар 2012. 11/15*

Ако је $abc \neq 0$, зависно од осталих вредности реалних параметара a, b и c дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{ccccc} ay & + & bx & = & c \\ cx & + & az & = & b \\ bz & + & cy & = & a. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} ay & + & bx & = & c \\ cx & + & az & = & b \\ bz & + & cy & = & a. \end{array}$$

Решење. Запишимо нормално систем:

$$\begin{array}{ccccccc} bx & + & ay & & & = & c \\ cx & & & + & az & = & b \\ & & cy & + & bz & = & a. \end{array}$$

Решење. Запишимо нормално систем:

$$\begin{array}{rcrcrcl} bx & + & ay & & & = & c \\ cx & & & + & az & = & b \\ & & cy & + & bz & = & a. \end{array}$$

Детерминанта система je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}$$

Решење. Запишимо нормално систем:

$$\begin{array}{ccccccc} bx & + & ay & & & = & c \\ cx & & & + & az & = & b \\ & & cy & + & bz & = & a. \end{array}$$

Детерминанта система je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} \begin{matrix} b & a \\ c & 0 \\ 0 & c \end{matrix} =$$

$$\Big(0+0+0\Big) - \Big(0+abc+abc\Big) = -2abc.$$

Решење. Запишимо нормално систем:

$$\begin{array}{rcrcrcl} bx & + & ay & & & = & c \\ cx & & & + & az & = & b \\ & & cy & + & bz & = & a. \end{array}$$

Детерминанта система је:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} \begin{matrix} b & a \\ c & 0 \\ 0 & c \end{matrix} = -2abc \neq 0$$

систем има јединствено решење

Решење. Запишимо нормално систем:

$$\begin{array}{ccccccc} bx & + & ay & & & = & c \\ cx & & & + & az & = & b \\ & & cy & + & bz & = & a. \end{array}$$

Детерминанта система је:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} \begin{matrix} b & a \\ c & 0 \\ 0 & c \end{matrix} = -2abc \neq 0$$

систем има јединствено решење

$$\Delta_x = a^3 - ac^2 - ab^2 \Rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Решење. Запишимо нормално систем:

$$\begin{array}{rcrcrcl} bx & + & ay & & & = & c \\ cx & & & + & az & = & b \\ & & cy & + & bz & = & a. \end{array}$$

Детерминанта система је:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} \begin{matrix} b & a \\ c & 0 \\ 0 & c \end{matrix} = -2abc \neq 0$$

систем има јединствено решење

$$\Delta_x = a^3 - ac^2 - ab^2 \;\Rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\ldots \quad (x, y, z) = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right). \qquad \blacksquare$$

11. *1. III кол ЕкоФ 2014. група 14/42 (M)*

Систем
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 2z & = & p \\ px & + & 2y & + & 2z & = & p \end{array}$$
нема решења за $p \in$ ______________

11. *1. III кол ЕкоФ 2014. група 14/42 (M)*

Систем $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 2z & = & p \\ px & + & 2y & + & 2z & = & p \end{array}$ нема решења за $p \in$ ____________

Решење.

$\Delta = -4p^2 + 12p - 8 = -4(p-1)(p-2)$

11. *1. III кол ЕкоФ 2014. група 14/42 (М)*

Систем $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 2z & = & p \\ px & + & 2y & + & 2z & = & p \end{array}$ нема

решења за $p \in$ ____________

Решење.

$\Delta = -4p^2 + 12p - 8 = -4(p-1)(p-2) \neq 0$

1° $p \neq 1, 2$ $\quad \Delta \neq 0 \;\Rightarrow\;$ сис. има јед.реш.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 2z & = & p \\ px & + & 2y & + & 2z & = & p \end{array}$$

Решење.

$$\Delta = -4p^2 + 12p - 8 = -4(p-1)(p-2)$$

$$\Delta_x = -4p^2 + 8p - 4 = -4(p-1)^2$$

$$\Delta_y = -2p^2 + 4p - 2 = -2(p-1)^2$$

$$\Delta_z = 4p^2 - 6p + 2 = 4(p-1)(p - \tfrac{1}{2})$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 2z & = & p \\ px & + & 2y & + & 2z & = & p \end{array}$$

Решење.

$$\Delta = -4p^2 + 12p - 8 = -4(p-1)(p-2) = 0$$

$$\Delta_x = -4p^2 + 8p - 4 = -4(p-1)^2 = 0$$

$$\Delta_y = -2p^2 + 4p - 2 = -2(p-1)^2 = 0$$

$$\Delta_z = 4p^2 - 6p + 2 = 4(p-1)(p-\tfrac{1}{2}) = 0$$

$2^\circ\ p = 1 \quad \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \quad ???$

11. *1. III кол ЕкоФ 2014. група 14/42 (М)*

Систем $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 2z & = & p \\ px & + & 2y & + & 2z & = & p \end{array}$ нема

решења за $p \in$ ______________

Решење.

2° $p = 1$ $\quad \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \quad$???

11. *1. III кол ЕкоФ 2014. група 14/42 (M)*

Систем $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2\cdot y & + & 2z & = & 1 \\ 1\cdot x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array}$ нема

решења за $p \in$ ______________

Решење.

2° $p = 1$ $\quad \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \quad$???

11. *1. III кол ЕкоФ 2014. група 14/42 (M)*

Систем
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2\cdot y & + & 2z & = & 1 \\ 1\cdot x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$
нема

решења за $p \in$ ____________

Решење.

$2^\circ\ p = 1 \quad \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \quad ???$

Када Гаусом решимо систем добијамо:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & - & 2y & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

$(x, y, z) = (0, \frac{1}{2} - t, t),\ t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$ сис. има ∞ реш.

11. *1. III кол ЕкоФ 2014. група 14/42 (M)*

Систем $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 2z & = & p \\ px & + & 2y & + & 2z & = & p \end{array}$ нема

решења за $p \in$ ____________

Решење.

$\Delta = -4p^2 + 12p - 8 = -4(p-1)(p-2) = 0$

$\Delta_x = -4p^2 + 8p - 4 = -4(p-1)^2 = -4$

3° $p = 2$ $\quad \Delta = 0,\ \Delta_x = -4 \ \Rightarrow$ сис. нема реш.

11. *1. III кол ЕкоФ 2014. група 14/42 (М)*

Систем
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 2z & = & p \\ px & + & 2y & + & 2z & = & p \end{array}$$
нема решења за $p \in$ ____________

Решење.

$\Delta = -4p^2 + 12p - 8 = -4(p-1)(p-2) = 0$

$\Delta_x = -4p^2 + 8p - 4 = -4(p-1)^2 = -4$

$3^\circ \ p = 2 \quad \Delta = 0, \ \Delta_x = -4 \ \Rightarrow$ сис. нема реш.

Како би уписали одговор?

11. *1. III кол ЕкоФ 2014. група 14/42 (М)*

Систем $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 2z & = & p \\ px & + & 2y & + & 2z & = & p \end{array}$ нема

решења за $p \in \underline{\quad \{2\} \quad}$

Решење.

$\Delta = -4p^2 + 12p - 8 = -4(p-1)(p-2) = 0$

$\Delta_x = -4p^2 + 8p - 4 = -4(p-1)^2 = -4$

$3^\circ \ p = 2 \quad \Delta = 0, \ \Delta_x = -4 \ \Rightarrow$ сис. нема реш.

Како би уписали одговор? $\quad p \in \{2\}$ ■

12. *1. II кол ЕкоФ 2013. група 1 (Д)*

Ако је A матрица типа 3×2 и систем линеарних једначина

$$Ax = b$$

има јединствено решење, тада је $rang\, A =$

13. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

14. *ФОН, писмени испит, окт II 2008.*

а) Решити систем

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & + & x_2 & + & x_3 & +\ldots+ & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\
x_1 & + & & + & x_3 & +\ldots+ & x_{n-1} & + & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & & +\ldots+ & x_{n-1} & + & x_n & = & 2 \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & +\ldots+ & x_{n-1} & + & & = & n-1.
\end{array}$$

б) Одредити детерминанту Δ овог система.

в) Одредити $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ из Крамерових формула.

14. а) Решити систем

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & + & x_2 & + & x_3 & +\ldots+ & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\ x_1 & + & & + & x_3 & +\ldots+ & x_{n-1} & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & & +\ldots+ & x_{n-1} & + & x_n & = & 2 \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & +\ldots+ & x_{n-1} & + & & = & n-1. \end{array}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \ldots, \frac{n}{2} - (n-1)\right).$

б) Одредити детерминанту Δ овог система.

в) Одредити $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ из Крамерових формула.

14. а) Решити систем

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & + & x_2 & + & x_3 & + \ldots + & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\
x_1 & + & & + & x_3 & + \ldots + & x_{n-1} & + & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & & + \ldots + & x_{n-1} & + & x_n & = & 2 \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + \ldots + & x_{n-1} & + & & = & n-1.
\end{array}
$$

$(x_1, x_2, \ldots, , x_n) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \ldots, \frac{n}{2} - (n-1)\right).$

б) Одредити детерминанту Δ овог система.

$\Delta = (n-1) \cdot (-1)^{n-1}$

в) Одредити $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ из Крамерових формула.

14. а) Решити систем

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & + & x_2 & + & x_3 & + \ldots + & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\ x_1 & + & & + & x_3 & + \ldots + & x_{n-1} & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & & + \ldots + & x_{n-1} & + & x_n & = & 2 \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + \ldots + & x_{n-1} & + & & = & n-1. \end{array}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \ldots, \frac{n}{2} - (n-1)\right).$

б) Одредити детерминанту Δ овог система.

$\Delta = (n-1) \cdot (-1)^{n-1}$

в) Одредити $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ из Крамерових формула.

$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \Rightarrow \Delta_k = \Delta \cdot x_k = (n-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{n}{2} - (k-1)\right)$

КРАЈ ЧАСА