1. $$\int \frac{e^{2x} + e^{x}}{(e^{x} + 2)(e^{2x} + 1)}\,\mathrm{d}x.$$

1. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{(e^{x}+2)(e^{2x}+1)}\,\mathrm{d}x.$

Решење.

[смена $\boxed{t = e^{x}}$, $\mathrm{d}t = e^{x}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{e^{x}} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$]

$$I = \int \frac{t^{2}+t}{(t+2)(t^{2}+1)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t+2)(t^{2}+1)}.$$

1. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{(e^{x}+2)(e^{2x}+1)}\,\mathrm{d}x.$

Решење.

[смена $\boxed{t=e^{x}}$, $\mathrm{d}t=e^{x}\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{e^{x}}=\frac{\mathrm{d}t}{t}$]

$$I=\int \frac{t^{2}+t}{(t+2)(t^{2}+1)}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t+2)(t^{2}+1)}.$$

$1<3 \ \Rightarrow$ јесте права рац.ф-ја!

1. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{(e^{x}+2)(e^{2x}+1)}\,\mathrm{d}x.$

Решење.

$\left[\text{смена } \boxed{t=e^{x}},\ \ \mathrm{d}t=e^{x}\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{e^{x}}=\frac{\mathrm{d}t}{t}\right]$

$$I=\int \frac{t^{2}+t}{(t+2)(t^{2}+1)}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t+2)(t^{2}+1)}.$$

$1<3 \ \Rightarrow$ јесте права рац.ф-ја!

$$\frac{t+1}{(t+2)(t^{2}+1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{Bt+C}{t^{2}+1}$$

1. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{(e^{x}+2)(e^{2x}+1)}\,\mathrm{d}x.$

Решење.

[смена $\boxed{t=e^{x}}$, $\mathrm{d}t=e^{x}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{e^{x}}=\frac{\mathrm{d}t}{t}$]

$$I=\int \frac{t^{2}+t}{(t+2)(t^{2}+1)}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t+2)(t^{2}+1)}.$$

$1<3 \;\Rightarrow$ јесте права рац.ф-ја!

$$\frac{t+1}{(t+2)(t^{2}+1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{Bt+C}{t^{2}+1}\qquad /\cdot(t+2)(t^{2}+1)$$

$$t+1=A\cdot(t^{2}+1)+(Bt+C)\cdot(t+2)\qquad(*)$$

1. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{(e^{x}+2)(e^{2x}+1)}\,\mathrm{d}x.$

Решење.

[смена $\boxed{t=e^{x}}$, $\mathrm{d}t=e^{x}\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{e^{x}}=\frac{\mathrm{d}t}{t}$]

$$I=\int \frac{t^{2}+t}{(t+2)(t^{2}+1)}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t+2)(t^{2}+1)}.$$

$1<3 \ \Rightarrow$ јесте права рац.ф-ја!

$$\frac{t+1}{(t+2)(t^{2}+1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{Bt+C}{t^{2}+1} \quad / \ \cdot(t+2)(t^{2}+1)$$

$$t+1=A\cdot(t^{2}+1)+(Bt+C)\cdot(t+2) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow A=-1/5,\ B=1/5,\ C=3/5.$$

Решење.

[смена $\boxed{t = e^x}$, $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{e^x} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$]

$$I = \int \frac{t^2+t}{(t+2)(t^2+1)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t+2)(t^2+1)}.$$

$1 < 3 \;\Rightarrow$ јесте права рац.ф-ја!

$$\frac{t+1}{(t+2)(t^2+1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \qquad / \;\cdot (t+2)(t^2+1)$$

$$t+1 = A\cdot(t^2+1) + (Bt+C)\cdot(t+2) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow A = -1/5,\; B = 1/5,\; C = 3/5.$$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{1}{5}}{t+2} + \frac{\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t$$

[смена $\boxed{t = e^x}$, $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{e^x} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$]

$$I = \int \frac{t^2+t}{(t+2)(t^2+1)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t+2)(t^2+1)}.$$

$1 < 3 \;\Rightarrow$ јесте права рац.ф-ја!

$$\frac{t+1}{(t+2)(t^2+1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \qquad / \;\cdot (t+2)(t^2+1)$$

$$t+1 = A\cdot(t^2+1) + (Bt+C)\cdot(t+2) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow A = -1/5,\; B = 1/5,\; C = 3/5.$$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{1}{5}}{t+2} + \frac{\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t$$

$$= -\tfrac{1}{5}\int \tfrac{\mathrm{d}t}{t+2} + \tfrac{1}{5}\int \tfrac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} + \tfrac{3}{5}\int \tfrac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

[смена $\boxed{t = e^x}$, $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{e^x} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$]

$$I = \int \frac{t^2 + t}{(t+2)(t^2+1)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t+2)(t^2+1)}.$$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{1}{5}}{t+2} + \frac{\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+2} + \frac{1}{5}\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} + \frac{3}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \quad \text{!!! (то 11. зад)}$$

$$= -\frac{1}{5}\ln|t+2| + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \frac{3}{5}\operatorname{arctg} t + C$$

$$\left[\text{смена } \boxed{t = e^x},\ \mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{e^x} = \frac{\mathrm{d}t}{t}\right]$$

$$I = \int \frac{t^2 + t}{(t+2)(t^2+1)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t+2)(t^2+1)}.$$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{1}{5}}{t+2} + \frac{\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t$$

$$= -\tfrac{1}{5} \int \tfrac{\mathrm{d}t}{t+2} + \tfrac{1}{5} \int \tfrac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} + \tfrac{3}{5} \int \tfrac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \quad \text{!!! (то 11. зад)}$$

$$= -\tfrac{1}{5} \ln|t+2| + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{2} \ln(1+t^2) + \tfrac{3}{5} \operatorname{arctg} t + C$$

$$= -\tfrac{1}{5} \ln(e^x + 2) + \tfrac{1}{10} \ln(1 + e^{2x}) + \tfrac{3}{5} \operatorname{arctg} e^x + C.$$

■

2. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x}\,)}\,\mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int \frac{2x \operatorname{arctg} x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x.$

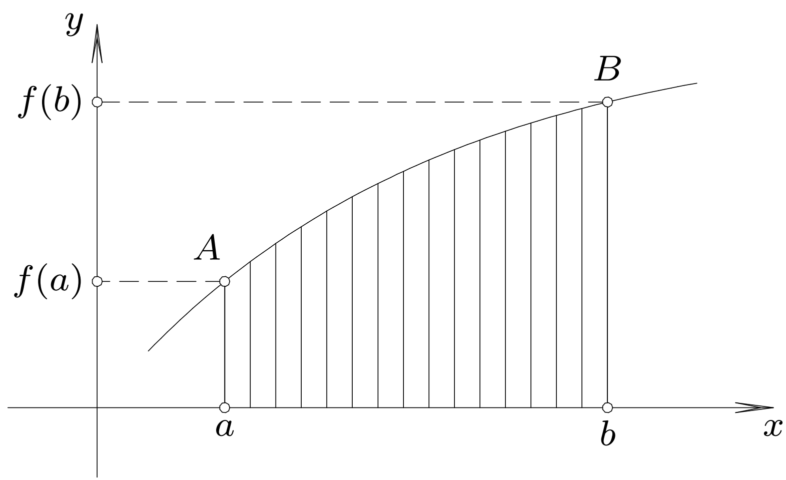
др Владимир Балтић

baltic@viser.edu.rs

14. термин

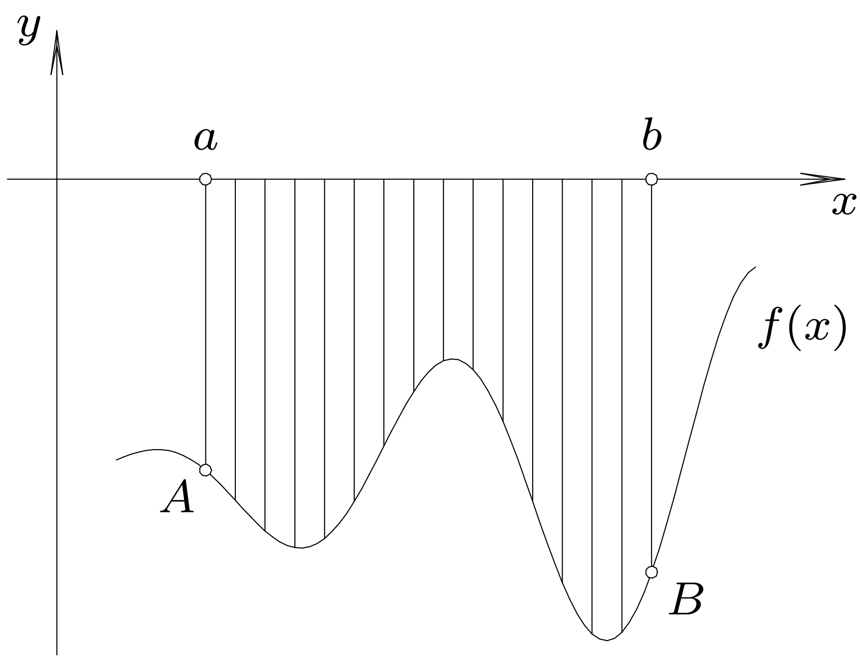
Примене интеграла

1° Одређени интеграл представља величину површине испод криве (до x-осе): $P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



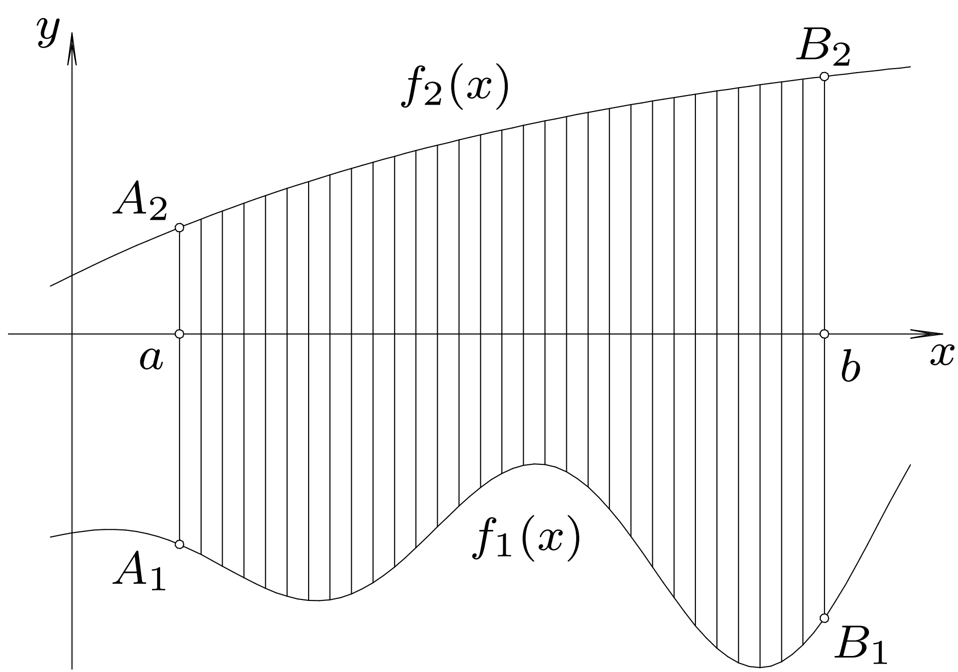
2° Ако је график испод x-осе онда је:

$$P = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



3° Најопштији случај је када је површина ограничена кривама $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leqslant f_2(x)$ на $[a, b]$, тј. $f_1(x)$ је доња крива, а $f_2(x)$ горња крива) и правама $x = a$ и $x = b$ је:

$$P = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, \mathrm{d}x.$$



4° Величина површине која је ограничена затвореном кривом задатом параметарским једначинама $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, при чему се крива обилази у позитивном смеру (обрнуто од смера казаљки на сату) је

$$P = \int_\alpha^\beta x(t)\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big(x(t)\dot{y}(t) + y(t)\dot{x}(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

5° Величина површине која је ограничена непрекидном кривом задатом у поларним координатама помоћу $\varrho = \varrho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ је

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

6° Дужина лука криве дате једначином $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, где је f функција са непрекидним изводом, је

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

7° Дужина лука криве задате параметарским једначинама $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, је

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

8° Дужина лука криве задате у поларним координатама са $\varrho = \varrho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ је

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varrho^2(\varphi) + (\varrho'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi.$$

9° Ако је позната величина $S(x)$ површине пресека тела и равни нормалне на x-осу у тачки x $(a \leqslant x \leqslant b)$, тада је запремина тела једнака

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ако површина чије тачке задовољавају $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ ротира око x-осе, образује једно ротационо тело.

10° Величина површине омотача ротационог тела је

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

11° Запремина ротационог тела је

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Задаци

1. ВИШЕР II кол 2017-8.

Израчунати површину ограничену следећим линијама: $y = -x^2 - 2x + 3$, $x = 0$, $x = 2$ и $y = 0$.

2. ВИШЕР септ. 2017.

Израчунати површину фигуре ограничене линијама $y = (x-4)^2$ и $y = 16 - x^2$.

2. ВИШЕР септ. 2017.

Израчунати површину фигуре ограничене линијама $y = (x-4)^2$ и $y = 16 - x^2$.

Решење. Пресечне тачке ових кривих добијамо кад решимо систем

$$y = (x-4)^2 \qquad \text{и} \qquad y = 16 - x^2,$$

$y = (x-4)^2 = 16 - x^2$, $x^2 - 8x + 16 = 16 - x^2$, $2x^2 - 8x = 0$, $2x(x-4) = 0$

пресечне тачке:

$x_1 = 0$ $y_1 = 16$ $T_1(0,16)$, $\quad$ $x_2 = 4$ $y_2 = 0$ $T_2(4,0)$.

2. ВИШЕР септ. 2017.

Израчунати површину фигуре ограничене линијама $y = (x-4)^2$ и $y = 16 - x^2$.

Решење. пресечне тачке:

$x_1 = 0\ y_1 = 16\ T_1(0,16)$, $\quad x_2 = 4\ y_2 = 0\ T_2(4,0)$.

$$P = \int_0^4 (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^4 (16 - x^2 - (x-4)^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \left(4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = (64 - \frac{128}{3}) - 0$$

$P = \frac{64}{3}$. ■

3. Израчунати дужину првог лука циклоиде

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

3. Израчунати дужину првог лука циклоиде $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ где је $a > 0$.

Решење. Због $\dot{x} = a - a\cos t, \dot{y} = a\sin t$ имамо

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}\,\mathrm{d}t =$$

$$a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + 1}\,\mathrm{d}t =$$

$$a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t =$$

Решење. $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t =$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}\,\mathrm{d}t =$

$a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$

$a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha =$
$1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, па за $\alpha = \frac{t}{2}$
добијамо $\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$

$\ell = \underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{2}\,a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$

Решење. $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t =$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}\,\mathrm{d}t =$

$a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$

$a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t =$

$\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{2}\,a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$

$$\left[\text{смена } \boxed{u = \frac{t}{2}},\ t = 2u,\ \ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u,\ \begin{array}{c|c} t & u \\ \hline 2\pi & \pi \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\ell = 2a\int_0^{\pi} \sin u \cdot 2\,\mathrm{d}u =$

Решење. $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t =$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}\,\mathrm{d}t =$

$a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$

$a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t =$

$\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{2}\,a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$

$$\left[\text{смена } \boxed{u = \frac{t}{2}},\ t = 2u,\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u,\ \begin{array}{c|c} t & u \\ \hline 2\pi & \pi \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\ell = 2a\int_0^{\pi} \sin u \cdot 2\,\mathrm{d}u = 4a(-\cos u)\Big|_0^{\pi} =$

$4a(-\cos\pi) - 4a(-\cos 0) = 4a - (-4a) = 8a.$ ■

4. Извести формулу за обим круга: $O = 2R\pi$.

4. Извести формулу за обим круга: $O = 2R\pi$.

Решење. Круг у поларним координатама је $\varrho = R$ $(\varrho' = 0)$, $\varphi = 0 ... 2\pi$. Из формуле 8° je:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0}\, \mathrm{d}\varphi = R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = R\varphi \,\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = 2R\pi.$$

■

5. Извести формулу за површину круга: $P = R^2\pi$.

6. Извести формулу за запремину лопте: $V = \dfrac{4}{3}R^3\pi$.

7. Извести формулу за површину лопте: $P = 4R^2\pi$.

8. Извести формулу за запремину ваљка: $V = R^2 H\pi$.

9. Извести формулу за површину омотача ваљка: $M = 2RH\pi$.

10. Извести формулу за запремину купе: $V = \dfrac{1}{3}R^2H\pi$.

11. Извести формулу за површину омотача купе: $M = R\ell\pi$, где је $\ell = \sqrt{R^2 + h^2}$.

12. ВИШЕР окт. 2018.

Израчунати површину P између криве

$$y = x - 3, \qquad \text{за } x \in [-2, 1] \quad \text{и} \quad x\text{-осе.}$$

Израчунати површину омотача M и запремину тела V које настаје ротацијом криве $y = x - 3$, за $x \in [-2, 1]$ око x-осе.

КРАЈ ЧАСА