Владимир Балтић

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

БЕОГРАД 2018.

Садржај

1. ТЕОРИЈСКИ УВОД 4
- 1.1. Пермутације 4
- 1.2. Детерминанте 8
- 1.3. Системи линеарних једначина 12
- 1.4. Матрице 18
- 1.5. Сопствене вредности и вектори 27

1. Теоријски увод

1.1. Пермутације

Пермутације су комбинаторни објекат, који нам је потребан да бисмо увели појам детерминанте. Сада ћемо дати две дефиниције појма пермутације (строго формално, ако узмемо да је једно дефиниција онда је друго теорема — сличну ситуацију ћемо имати касније код појма ранга матрице).

Дефиниција 1.1. *Пермутација* скупа $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ је произвољна уређена n–торка различитих елемената из тог скупа.

Пример 1.1. Нека је скуп $X_4 = \{a, b, c, d\}$. Тада је (b, d, c, a) једна пермутација тога скупа и њу ћемо још означавати и са $bdca$ (као низ слова). (a, d, b, a) и (a, b, c) нису пермутације скупа X_4 јер морају да имају све елементе различите и да су уређене четворке.

Дефиниција 1'. *Пермутација* скупа $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ је било које бијективно пресликавање σ скупа $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ на скуп X_n (значи $\sigma : \mathbb{N}_n \to X_n$ је "1-1" и "на").

Пример 1.2. Претходну пермутацију (b, d, c, a) можемо посматрати и као следеће пресликавање $\sigma : \mathbb{N}_4 \to X_4$ дато са $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$, односно као пресликавање одређено помоћу $\sigma(1) = b,\ \sigma(2) = d,\ \sigma(3) = c,\ \sigma(4) = a$.

Скуп свих пермутација означићемо са S_n.

Сада ћемо увести појам *лексикографског поретка*(то је начин на који се уређују разни спискови, телефонски именици, речи у речницима...): нека је у скупу $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дато уређење са $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ тада кажемо да су уређена n–торка $(a_1, \ldots, a_n)$ и уређена m–торка $(b_1, \ldots, b_m)$ у релацији мање, тј. $(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_m)$ ако постоји неки број $k \in \mathbb{N}$ за који важи да је $a_k < b_k$ и $a_i = b_i$ $(\forall i < k)$ или ако је $n < m$, а $a_i = b_i$ $(\forall i \leqslant n)$. Сви ови a_i и b_j су елементи X_n.

Пример 1.3. Даћемо све пермутације у лексикографском поретку следећих скупова

$X_1 = \{a\}$,	$X_2 = \{a, b\}$	$X_3 = \{a, b, c\}$:
a	ab ba	abc acb bac bca cab cba

Теорема 1.1. Укупан број свих пермутација једнак је $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Доказ: У n–торки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ различитих елемената скупа X_n, први члан a_1 може бити било који од n елемената скупа X_n, други члан a_2 може бити било који елемент различит од већ изабраног елемента a_1, односно било који од $n-1$ елемената скупа $X_n \setminus \{a_1\}$, итд, k–ти члан може бити било који од $(n-k+1)$ елемената скупа $X_n \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$, итд, претпоследњи елемент a_{n-1} бирамо из двочланог скупа $X_n \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$, док је преостали елемент a_n последњи члан n–торке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Стога је укупан број n–торки различитих елемената скупа X_n једнак $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$, што је и требало доказати. $\square$

Видимо из Примера 1.3 да пермутација једночланог скупа стварно има $1 = 1!$, пермутација двочланог скупа има $2 = 2! = 1 \cdot 2$, а пермутација трочланог скупа има $6 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Ако у пермутацији σ елементи σ_i и σ_k задовољавају $\sigma_i > \sigma_k$, при чему је $i < k$, кажемо да елементи σ_i и σ_k образују *инверзију*. Значи, два елемента у пермутацији образују инверзију, ако нам прво иде већи, а затим мањи. Пермутација σ је *парна* уколико је укупан број инверзија у њој паран, а *непарна* ако је укупан број инверзија непаран. *Знак* (*парност*) пермутације σ, у ознаци *sgn* σ, дефинишемо као

$$sgn\ \sigma = \begin{cases} 1 & \text{ако је } \sigma \text{ парна пермутација} \\ -1 & \text{ако је } \sigma \text{ непарна пермутација} \end{cases} = (-1)^{\text{број инверзија}}.$$

Може се показати да важи $sgn\ \sigma = \prod_{i<j} \dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Пример 1.4. Пермутација *bdca* из примера 1 је парна јер има 4 инверзије: b и a чине прву (на првом месту је "веће" слово b, него на четвртом месту где је "мање" слово a), d и c другу, d и a трећу, а c и a четврту. Сви остали елементи не чине инверзију.

Од сад, ако се не нагласи другачије, подразумеваћемо да је скуп елемената које пермутујемо $X_n = \mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Пермутацију $12\ldots n$ називамо *полазна* или *идентична* и обележаваћемо је са ϵ, тј. $\epsilon = 12\ldots n$. Та пермутација је парна јер је укупан број инверзија у њој нула (никоја два елемента не чине инверзију јер увек иде прво мањи број, па онда већи). Пермутација $n(n-1)\ldots 21$ има највише инверзија (свака два елемента у овој пермутацији образују инверзију): n на првом месту чини инверзију са свих осталих $n-1$ бројева, $n-1$ на другом месту чини инверзију са осталих $n-2$ бројева (сем n, јер смо ту већ бројали), итд. до 2 који чини једну инверзију са 1 који се налази иза њега - стога је укупан број инверзија у овој пермутацији једнак $(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. Пермутацију τ_{ij} која мења бројеве i и j $(i < j)$, а остале бројеве оставља на свом месту: $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, а $\tau(k) = k$ за $k \neq i, j$ зовемо *транспозиција*. Ако хоћемо ову пермутацију да представимо као низ бројева, она би имала облик $12\ldots(i-1)j(i+1)\ldots(j-1)i(j+1)\ldots(n-1)n$. У свакој транспозицији има $2(j-i-1)+1$ парова бројева који чине инверзију: (j,i), (j,k), (k,i), где је k произвољан број између i и j (тј. $k \in \{i+1, i+2, \ldots, j-1\}$), па је стога транспозиција непарна пермутација.

Свака пермутација може представити и као композиција одређеног броја транспозиција. Ово нам даје још један начин (I начин је преко укупног броја инверзија) за одређивање парности пермутације (парност пермутација је битна за увођење појма детерминанте):

II начин уколико се пермутација може представити као композиција парног броја транспозиција она је парна, а ако се може представити као композиција непарног броја транспозиција она је непарна (тј. полазећи од полазне пермутације колико нам је потребно замена места по два елемента да бисмо добили дату пермутацију), односно

$$sgn\ \sigma = (-1)^{\text{број транспозиција}}.$$

Поред уобичајеног записа пермутације као функције постоји и *циклусни запис* пермутације, који је погоднији у неким применама. Како се добија циклусни запис пермутације?

Приметимо да за пермутацију $\alpha = 24513$ важи

$$\alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = 4, \quad \alpha(4) = 1.$$

Пермутација α шаље елемент 1 у 2, 2 у 4 и 4 назад у 1, и тада кажемо да ови елементи чине *ciklus* (1 2 4) дужине 3. Слично, елементи 3 и 5 чине циклус (3 5) дужине 2, па је циклусни запис ове пермутације

$$\alpha = (1\ 2\ 4)(3\ 5).$$

Циклусни запис за произвољну пермутацију π може да се добије помоћу следећег поступка, који се понавља све док сви елементи не буду распоређени у циклусе:

> Изабрати произвољан елемент a који још није распоређен у неки циклус. Нови циклус чине елементи
>
> $$(a\ \ \pi(a)\ \ \pi(\pi(a))\ \ \pi(\pi(\pi(a)))\ \ \ldots\ \ \pi^{k-1}(a))$$
>
> које ређамо све док не дођемо до најмањег природног броја k за који важи $\pi^k(a) = a$.

Постоје два начина да променимо циклусни запис без утицаја на саму пермутацију. Најпре, сваки циклус може да почне било којим од својих елемената — на пример, (7 8 2 1 3) и (1 3 7 8 2) представљају исти циклус. Друго, поредак циклуса није важан — на пример, (1 2 4)(3 5) и (3 5)(1 2 4) представљају исту пермутацију. Битни су подела елемената скупа на циклусе, као и њихов поредак унутар циклуса, и они су јединствено одређени циклусним записом.

Циклусни запис нам може дати корисне информације о пермутацији. Ово нам даје још један начин, за одређивање парности пермутације:

III начин уколико је σ пермутација скупа X_n представљена у циклусном запису и ако она има c различитих циклуса, тада је

$$sgn\ \sigma = (-1)^{n-c}.$$

Пример 1.5. Пермутација $\sigma = 2431$ из примера 1 може се добити од полазне пермутације $\epsilon = 1234$ ако прво заменимо места прва два елемента (тада добијамо пермутацију 2134), а затим ако заменимо места другог и четвртог елемента (то су 1 и 4). Већ смо видели у примеру 5 да је ова пермутација парна - бројањем инверзија (4), а то можемо закључити и преко броја транспозиција (2).

Пример 1.6. Одредићемо инверзну пермутацију σ^{-1} за $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Како се пермутацијом σ 1 слика у 2, 2 се слика у 4, 3 се слика у 3 и 4 се слика у 1, инверзном пермутацијом треба да се слика 2 у 1, 4 се слика у 2, 3 се слика у 3 и 1 се слика у 4, тј. имамо да је

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Детерминанте

Нека је $A = (a_{ij})$ реална КВАДРАТНА матрица реда n (овај појам уводимо на страни 19, а до тад је можемо замишљати као квадратну шему облика n са n у коју је уписано n^2 бројева). Тада је *детерминанта* матрице A, у ознаци

$$\det(A), \qquad |A| \qquad \text{или} \qquad \det A,$$

једнака следећој суми по свим пермутацијама σ из скупа $\mathbf{S}_n$:

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\ a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)},$$

где $\operatorname{sgn} \sigma$ означава знак пермутације. Ово је формална дефиниција, а ми ћемо сада објаснити шта је и како се израчунава вредност детерминатне.

Детерминанта је један конкретан број који се придружује квадратној шеми (за матрице које нису квадратног облика не постоји детерминанта!), док матрица облика $m \times n$ представља правоугаону шему са $m \cdot n$ бројева.

Пример 1.7. Написаћемо детерминанте матрица мањих димензија:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \\ - \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad + \end{array} = \begin{array}{ccccc} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array}$$

■

Овај начин за израчунавање детерминате 3×3 када допишемо прве 2 колоне назива се *Сарусово правило*.

Детерминанте већег реда **МОРАЈУ** се одредити на неки други начин (нпр. Лапласовим развојем сводимо на рачунање више детерминанти нижег реда или свођењем на детерминанту троугаоне матрице, што се понегде назива и Гаусова метода).

Минор реда k ($k \leqslant n$) детерминанте реда n је детерминанта реда k која се добија у пресеку неких k врста и неких k колона полазне детерминанте. Минор M_{ij} елемента a_{ij} је минор реда $(n-1)$, који се добија од полазне детерминанте искључивањем i–те врсте и j–те колоне. *Кофактор* (или *алгебарски комплемент*) елемента a_{ij} квадратне матрице A је $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.

Основне особине детерминанти

1° $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$, где је A^{T} транспонована матрица матрице A (видети страну 19).

2° Ако матрица A има врсту (колону) са свим елементима једнаким нула, тада је $|A| = 0$.

3° Ако матрица A има две једнаке врсте (колоне), тада је $|A| = 0$.

4° Ако A има две пропорционалне врсте (колоне), тада је $|A| = 0$.

5° Ако је матрица A троугаона (горње или доње) тада је детерминанта једнака производу елемената са главне дијагонале:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

(за појмове главне дијагонале и троугаоне матрице – видети страну 21)

6° Ако матрице A и B имају пропорционалне елементе у i–тој врсти (са коефицијентом пропорционалности m), а остале врсте су им једнаке, тада је $|B| = m \cdot |A|$. Аналогно тврђење важи и за колоне.

7° Ако се матрица B добија од матрице A тако што у матрици A две врсте (колоне) замене места, тада је $|B| = -|A|$.

8° Ако се матрица B добија од матрице A тако што се у матрици A i–тој врсти (колони) дода j–та врста (колона) помножена неким бројем m, тада је $|B| = |A|$.

9° Лапласов развој по елементима i–те врсте

$|A| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$

Лапласов развој по елементима j–те колоне

$|A| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},$

где је n ред матрице A, а A_{ij} су одговарајући кофактори.

Напомена. Детерминанта се може дефинисати и на овај начин, преко Лапласовог развоја.

10° **Бине–Кошијева теорема.**

Детерминанта производа матрица (за дефиницију видети страну 20) једнака је производу детерминанти тих матрица, тј. $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Коришћење ових особина за израчунавање детерминанти илустроваћемо следећим примером.

Пример 1.8. Следећу детерминанту трећег реда израчунаћемо по формули коју смо добили у Примеру 2.7 (тј. по Сарусовом правилу), свођењем детерминанте на троугаону (ту користимо особине 8°, 9° и 5°), Лапласовим развојем по елементима прве врсте, као и Лапласовим развојем по елементима друге колоне погодно трансформисане детерминанте (овде смо детерминанте 2×2 рачунали по формули из Примера 2.7).

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot(-4) + (-2)\cdot 2\cdot(-2) - (-2)\cdot 0\cdot(-4) - 3\cdot 3\cdot(-2) - 1\cdot 2\cdot 3$$

$$= 0 - 12 + 8 - 0 - (-18) - 6 = 8.$$

Да би добили троугаону матрицу замениһемо I и II колону (1 доводимо на прво место) - тада вредност детерминанте промени знак. Затим III врсти додајемо I помножену са 2. Кад од III врсте одузмемо II добијамо троугаону матрицу, чија је детерминанта једнака производу елемената са главне дијагонале: $-8 = 1 \cdot 2 \cdot (-4)$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -(-8) = 8.$$

Лапласов развој по елементима прве врсте је:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot 6 - 18 + (-2)\cdot(-4) = 8.$$

Лапласов развој можемо поједноставити ако додамо двоструку I врсту III врсти (особина 8° са $m = 2$), а затим развијемо детерминанту по II колони (особина 9°):

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4+2\cdot 3 & -2+2\cdot 1 & 3+2\cdot(-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -(-2-6) = -(-8) = 8. \quad \blacksquare$$

Бројеви $(-1)^{i+j}$, које израчунавамо код Лапласовог развоја, у ствари представљају бројеве $+1$ и -1 (зависно да ли је број $i + j$ паран или непаран). Стога, они представљају знак испред детерминанте минора у алгебарском кофактору (шаховске табле од знака $+$ и $-$, при чему је $\boxed{+}$ у горњем левом углу!):

$$\begin{matrix} \boxed{+} & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad \text{односно} \qquad \begin{matrix} \boxed{+} & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Навели смо случајеве за детерминанте облика 3×3 и 4×4, јер ће се за њих најчешће и користити, док бисмо слично добили одговарајуће шеме и за детерминанте већег реда.

За одређивање детерминанти реда n често се користе рекурентне једначине (видети поглавље 10.5. Рекурентне једначине).

Пример 1.9. Означимо *тридијагоналну детерминанту* реда n која има на главној дијагонали елементе b, на дијагонали испод главне a, на дијагонали изнад главне c, док су сви остали елементи једнаки 0 са $D_n(a, b, c)$. Одредити рекурентну везу која важи за $D_n(a, b, c)$.

Означимо краће ову детерминанту са D_n. Развићемо је прво по I колони, а затим другу од детерминати реда $n-1$ по I врсти:

$$D_n = \begin{vmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & c & & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & a & b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & b & c \\ 0 & 0 & 0 & & a & b \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} b & c & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ a & b & \ddots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & b & c \\ 0 & 0 & & a & b \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & b & c \\ 0 & 0 & & a & b \end{vmatrix} = b \cdot D_{n-1} - a \cdot c \cdot \begin{vmatrix} b & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & b & c \\ 0 & & a & b \end{vmatrix},$$

тј. важи рекурентна веза $D_n = b \cdot D_{n-1} - ac \cdot D_{n-2}$. ■

Примене детерминанти

Детерминанте налазе изузетно велики број примена у разним гранама математике. Овде ћемо навести само неке од најзначајнијих.

- Код рачунања површина и запремина, при смени променљивих код двојних и тројних интеграла, користи се Јакобијева детерминанта (или *Јакобијан*). Због ових примена је и настао појам детерминанте!

- Код квадратних система од n једначина са n непознатих, помоћу $n+1$ детерминанте ћемо дискутовати решења (ту се јављају и Крамерове формуле, помоћу којих можемо добити јединствено решење система или установити да систем нема решења).

- За испитивање линеарне независности функција, што налази примену код диференцијалних једначина, користи се детерминанта Вронског (или *Вронскијан*), која садржи n функција са њиховим изводима до $(n-1)$-ог извода.

- Површина троугла са теменима $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2), T_3(x_3, y_3)$ дата је преко следеће детерминанте (са | | је означена апсолутна вредност):

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

  Површину било ког многоугла можемо израчунати тако што га поделимо на троуглове и онда применимо претходну формулу.

1.3. Системи линеарних једначина

Под *линеарном једначином* (у скупу $\mathbb{R}$) подразумевамо израз облика

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

где су коефицијенти $a_i \in \mathbb{R}$ и константни члан $b \in \mathbb{R}$, а x_i су *променљиве* или *непознате*. Скуп вредности $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$ које задовољавају једначину (1): $a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n = b$ назива се *решење једначине* (1) или *опште решење*. Појединачно решење, $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$, назива се *партикуларно решење*.

Решити једначину значи наћи скуп (свих) њених решења!

Решења ћемо уобичајено представљати преко уређене n–торке: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

При решавању линеарне једначине јављају се три случаја:

1° постоји коефицијент $a_i \neq 0$ (без умањења општости нека је $a_1 \neq 0$) и тада је опште решење дато са

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}t_2 - \frac{a_3}{a_1}t_3 - \ldots - \frac{a_n}{a_1}t_n,\ x_2 = t_2,\ x_3 = t_3,\ \ldots\ ,\ x_n = t_n,$$

где су $t_2, t_3, \ldots, t_n$ произвољни реални бројеви (тада кажемо да решење зависи од $n-1$ параметара);

2° $a_1 = \ldots = a_n = 0$, а $b \neq 0$ тада једначина (1) нема решења;

3° $a_1 = \ldots = a_n = b = 0$ тада имамо решење које зависи од n параметара: $x_1 = t_1,\ x_2 = t_2,\ \ldots\ ,x_n = t_n,\quad t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

Напомена. Кад су сви $a_i = 0$ кажемо да је то *дегенерисана једначина*.

Пример 1.10. За линеарну једначину $x + 4y - 3z - w = 5$ партикуларно решење је уређена четворка $u = (8, 1, 3, -2)$ јер је

$$8 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - (-2) = 5 \quad \checkmark$$

док је опште решење дато са $u \in \{(5 - 4t_1 + 3t_2 + t_3, t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$. Параметри t_1, t_2 и t_3 могу узети произвољне реалне вредности, а за сваку конкретну вредност добијамо једно партикуларно решење (горње је за $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = -2$). ■

Систем од m линеарних једначина са n непознатих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ је следећи скуп једначина (где су $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & +\ldots+ & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & +\ldots+ & a_{2n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & +\ldots+ & a_{mn-1}x_{n-1} & + & a_{mn}x_n & = b_m. \end{array} \tag{2}$$

За n–торку $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ кажемо да је *партикуларно решење система* (2) ако задовољава сваку од ових m једначина, а скуп свих решења називамо *општим решењем*.

Уколико 2 система имају исто решење, кажемо да су *еквивалентни*.

Систем је *хомоген* ако је $b_1 = \ldots = b_m = 0$. Хомоген систем увек има *тривијално решење* $(0, \ldots, 0)$. Ако постоји још неко решење хомогеног система оно се назива *нетривијално решење*.

Гаусов систем елиминације

Следеће три врсте трансформација једначина система не мењају скуп решења система (тј. новодобијени систем је еквивалентан полазном):
1° замена места две једначине;
2° множење целе једначине неким скаларом $k \neq 0$;
3° додавање неке једначине некој другој једначини.

Трансформације 2° и 3° заједно дају трансформацију додавања неке једначине помножене скаларом k некој другој једначини. Овим трансформацијама ћемо полазни систем (2) свести на систем (3), за који кажемо да има *степенаст* или *трапезан облик* (енглески *echelon form*):

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & A_{13}x_3 & +\ldots+ & A_{1n}x_n & = B_1 \\ & & A_{2j_2}x_{j_2} & + & A_{2(j_2+1)}x_{j_2+1} & +\ldots+ & A_{2n}x_n & = B_2 \\ & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & A_{rj_r}x_{j_r} & +\ldots+ & A_{rjn}x_n & = B_r \end{array} \tag{3}$$

Приликом ових трансформација могу се десити две карактеристичне ситуације:

1) $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b \neq 0$ или краће $0 = b$ – тада кажемо да систем *није сагласан* (или да је *неконзистентан*), тј. *нема решења*;

2) $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ или краће $0 = 0$ – ову линеарну једначину задовољава било која n–торка реалних бројева, па стога такву једначину можемо избрисати и то се неће одразити на тражење решења. Због овога у систему (3) у степенастој форми можемо имати мање једначина него у полазном систему (2), тј. генерално важи $r \leqslant m$. Једини начин на који се може смањити број једначина у систему је да у неком тренутку добијемо једначину облика $0 = 0$!

Ако смо систем (2) свели на систем (3) у степенастом облику, онда систем (2) има решења (једно или више, што разматрамо у наставку), тј. кажемо да је систем (2) *сагласан*.

Променљиве које се јављају на почетку неке од једначина: $x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ називају се *везане променљиве*, зато што зависе од променљивих које се јављају након њих у једначини у којој се оне налазе на првом месту. Све остале променљиве су *слободне променљиве*.

- Ако је $r = n$ (тј. ако су све променљиве везане) систем има *јединствено решење*;

- Ако је $r < n$ тада систем има *бесконачно много решења* (још се каже да систем у овом случају има *вишеструко решење*). Тада има r везаних и $n-r$ слободних променљивих, које могу узети произвољне вредности, тј. њима се доделе вредности параметара: $t_1, \ldots, t_{n-r}$.

Затим, вредности везаних промењљивих одређујемо редом из последње, затим претпоследње и тако даље до прве једначине система (3) у функцији од слободних промењљивих (ако их има) и већ одређених везаних промењљивих.

Често се за случај када систем има вишеструко решење каже да је *неодређен*, али ту терминологију треба избегавати јер није коректна (систем је у потпуности одређен својим једначинама и у овом случају се и може решити). У овом случају треба наћи сва решења, а не само констатовати да их има бесконачно много.

Често се погрешно за систем који нема решења каже да је *немогућ*.

Решења можемо записати преко вектора промењљивих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Тада опште решење система можемо да запишемо у облику

$$X = X_0 + t_1 \cdot X_1 + t_2 \cdot X_2 + \ldots + t_{n-r} \cdot X_{n-r}, \qquad t_1, t_2, \ldots, t_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

Пошто ове векторе можемо да посматрамо као матрице облика $n \times 1$, то се вектор X може записати и као $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ (операцију транспоновања матрица уводимо на страни 19).

Вектор X_0 представља партикуларно решење система (њега добијамо из општег решења када узмемо да су сви параметри једнаки 0), док је $t_1 \cdot X_1 + t_2 \cdot X_2 + \ldots + t_{n-r} \cdot X_{n-r}$ решење одговарајућег хомогеног система (сваки од вектора X_i, $i=1,...,n-r$, добијамо из општег решења када за параметар t_i узмемо вредност 1, док су сви остали параметри једнаки 0). *Фундаментални систем решења* система образују вектори $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$.

Пример 1.11. Решити систем у скупу реалних бројева:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2. \end{array}$$

Да бисмо "елиминисали" прву промењљиву, x, потребно је да од друге једначине одузмемо 3 пута прву и од треће да одузмемо 5 пута прву. То ћемо убудуће обележавати само ознакама $\mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I}$ и $\mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{I}$ поред друге, односно треће једначине. Систем се свео на

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ & - & 7y & + & 11z & = & 10 \\ & - & 7y & + & 11z & = & 7. \end{array}$$

Даље, промењљиву y елиминишемо из треће једначине: $\mathrm{III} - \mathrm{II}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ & - & 7y & + & 11z & = & 10 \\ & & & & 0 & = & -3. \end{array}$$

Како смо добили једначину $0 = -3$, систем нема решења. ■

Пример 1.12. Решити систем у скупу реалних бројева:

$$\begin{array}{rcrcl}
x & + & 2y & = & 5 \\
2x & - & y & = & 0 \qquad \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr}
x & + & 2y & = & 5 \\
 & - & 5y & = & -10
\end{array}$$

Систем смо свели на систем у степенастом облику. Променљиве x и y се појављују на почетку неке од једначине па су обе везане променљиве. Како је број једначина $r = 2$ једнак броју променљивих $n = 2$ имаћемо јединствено решење, које добијамо тако што y одредимо из друге једначине ($y = 2$) и онда то уврстимо у прву једначину и налазимо x (тј. $x = 1$).

Значи, решење овог система је $(x, y) = (1, 2)$. ∎

Пример 1.13. Решити систем у скупу реалних бројева:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & - & z & = & 1 \\
3x & + & 6y & - & 3z & = & 3 \\
-2x & - & 4y & + & 2z & = & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & - & z & = & 1 & \\
3x & + & 6y & - & 3z & = & 3 & \qquad \mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I} \\
-2x & - & 4y & + & 2z & = & -2 & \qquad \mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & - & z & = & 1 \\
 & & & & 0 & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & 0.
\end{array}$$

Једначине $0 = 0$ можемо да обришемо и добили смо систем од једне једначине са три непознате:

$$x + 2y - z = 1.$$

Променљива x је везана променљива, а променљиве y и z су слободне променљиве и њима можемо доделити произвољне вредности, тј. рећи ћемо да су оне једнаке $y = p, \quad z = t, \quad t, p \in \mathbb{R}$, где су p и t неки реални параметри. Када то уврстимо у систем добијамо да је $x = 1 - 2p + t$, тј. имамо решење система:

$$(x, y, z) = (1 - 2p + t, p, t), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

Решење овог система можемо записати и као

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t, p \in \mathbb{R}.$$

Вектори $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ чине фундаментални систем решења. ∎

Пример 1.14. Испитати да ли хомогени систем има нетривијално решење:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & + & v & = & 0 \\ -x & - & y & - & 2z & + & v & = & 0 \\ 2x & + & 6y & - & 3z & + & 2v & = & 0. \end{array}$$

Систем има нетривијално решење, јер када га сведемо на степенасти облик (то је увек могуће код хомогених система јер не можемо добити једначину облика $0 = b \neq 0$; значи хомоген систем је увек сагласан) имаћемо систем од $r \leqslant 3$ једначина са $n = 4$ непознатих. Зато ћемо имати бар једну $(n - r \geqslant 1)$ слободну промењиву, па ћемо имати и неко нетривијално решење.

Када би систем свели на степенаст облик добили бисмо:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & + & v & = & 0 \\ & & y & - & z & + & 2v & = & 0 \\ & & & - & 3z & - & 4v & = & 0 \end{array}$$

и његово решење је $\quad (x, y, z, v) = (21t, -10t, -4t, 3t)\,, \quad t \in \mathbb{R}$.

Фундаментални систем чини вектор $X_1 = (21, -10, -4, 3)^{\mathrm{T}}$, јер се сва решења могу записати као $t \cdot X_1$, $t \in \mathbb{R}$. ■

Напомена. Овде смо узели да је слободна промењива $v = 3t$, $t \in \mathbb{R}$ и добили смо горње решење. Да смо узели да је слободна промењива v једнака $v = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ добили би $\quad (x, y, z, v) = \left(7\alpha, -\frac{10}{3}\alpha, -\frac{4}{3}\alpha, \alpha\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$. Ова два решења су иста (за $\alpha = 3t$), само што са t немамо разломке!

Решавање система помоћу детерминанти

Системе од n линеарних једначина са n непознатих:

$$\begin{array}{lclclclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}$$

можемо решавати и помоћу детерминанти.

Уведимо детерминанте које се јављају у Крамеровим формулама.

Матрица система је

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

а њену детерминанту, $\Delta = \det(A)$, називамо *детерминанта система*. $\Delta_i = \det(B_i), i = 1, \ldots, n$, где се матрице B_i добијају од матрице A, тако што i–ту колону заменимо са колоном слободних чланова ($b_{1i} = b_1, \ldots, b_{ni} = b_n$, а остали елементи су исти као у матрици A: $b_{kj} = a_{kj}$ за $j \neq i$).

Теорема 1.2. Ако је детерминанта система $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење и оно је дато помоћу *Крамерових формула*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots\ , \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Ако је $\Delta = 0$ и неко $\Delta_i \neq 0$ тада систем нема решења.

Пример 1.15. Решимо систем $\quad x_1 + x_2 = 6,\ 2x_1 - x_2 = -3.$

Одредимо детерминанту система Δ, као и остале детерминанте Δ_1 и Δ_2 које се јављају у Крамеровим формулама:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -15,$$

па је решење $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-3}{-3} = 1$ и $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-15}{-3} = 5.$ ■

Ако је $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$ тада не знамо да ли систем има решење (то можемо установити Гаусовим системом елиминације), али ако има онда је то решење вишеструко.

Теорема 1.3. Хомоген систем од n једначина са n непознатих има нетривијална решења ако и само ако за детерминанту система важи $\Delta = 0$.

Ово тврђење налази примену касније код одређивања сопствених вредности и вектора, као и за испитивање линеарне независности вектора, што ћемо видети да је директно повезано са рангом матрице.

Пример 1.16. Систем
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$
је пример система за који је задовољено да је $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ (све ове детерминанте имају пропорционалне колоне), а нема решења (након првог корака у Гаусовом систему елиминације друга и трећа једначина се своде на $0 = 1$ и $0 = 4$). ■

Решавање система матричном методом

Инверзне матрице, као и појам ранга, налазе примену код решавања система. Системе од n једначина са n непознатих можемо решавати и тражењем инверзне матрице. Запишимо овај систем у матричном облику

$$A \cdot x = b,$$

где је $A = (a_{ij})_1^n$ матрица система, а $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ су колона[1] непознатих, односно колона слободних чланова.

[1]Колона је матрица облика $n \times 1$ – видети страну 19.

Тада ако постоји инверзна матрица A^{-1} имамо да је решење дато са

$$x = A^{-1}b.$$

Из овог облика се могу извести Крамерове формуле.

Решавање система помоћу ранга матрице

Посматрајмо општи случај система линеарних једначина:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & +\ldots+ & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & +\ldots+ & a_{2n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & +\ldots+ & a_{mn-1}x_{n-1} & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

где су $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. Матрице

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|, \qquad B = \left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\|$$

називају се, редом, *матрица система* и *проширена матрица система*.

Сада ћемо навести теорему која, уз помоћ ранга матрица A и B (за дефиницију ранга видети страну 25), утврђује када систем има решења.

Теорема 1.4. **Кронекер-Капелијева теорема.** Систем линеарних једначина је сагласан (има решења) ако и само ако је $r(A) = r(B)$.

Могу наступити следећа три случаја:
1° уколико је $r(A) < r(B)$ систем нема решења;
2° уколико је $r(A) = r(B) = n$ систем има јединствено решење;
3° уколико је $r(A) = r(B) < n$ систем има вишеструко решење које зависи од $n - r(A)$ параметара
(овде n означава број промењљивих у систему).

1.4. Матрице

Правоугаони шема облика

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \text{ или } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

где су a_{ij} реални бројеви назива се *матрица* над пољем $\mathbb{R}$.

Ова матрица, A, означава се са

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n,$$

односно $||a_{ij}||_{m\times n}$, као и $[a_{ij}]_{m\times n}$.

Напомена. Равноправно ћемо користити све три горенаведене ознаке за матрице, ( ), || ||, [ ], али треба обратити да пажњу да не помешамо са ознаком | | која се користи само за детерминанте!

У матрици A се m хоризонталних n–торки

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \quad (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \quad \dots \quad (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

називају *врсте* или *редови матрице*, а n вертикалних m–торки

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

су *колоне* или *ступци матрице* A (једнина *стубац*). Елемент a_{ij} се јавља у i–том реду и j–тој колони. За матрицу са m врста и n колона кажемо да је *димензије* (или *облика*) $m \times n$ (m са n). Матрица је *квадратна* ако је $m = n$ и тада користимо и ознаку $||a_{ij}||_1^n$. За ту матрицу кажемо да је квадратна матрица *реда* n.

Транспонована матрица матрице A, A^{T}, добија се тако што врсте матрице A постану колоне матрице A^{T} и што колоне матрице A постану врсте матрице A^{T}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ако је A матрица облика $m \times n$, онда је A^{T} матрица облика $n \times m$.

Пример 1.17.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Две матрице су *једнаке*, $A = B$, ако имају исте димензије $m \times n$ и одговарајући елементи су им једнаки: $a_{ij} = b_{ij}$. Дакле једнакост две матрице се своди на систем од $m \cdot n$ једначина.

За две матрице A и B исте димензије $m \times n$ дефинишемо *збир*

$$A + B = \begin{Vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Сума матрица различитих димензија није дефинисана.

Пример 1.18.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2-5 & -3+6 & 4-1 \\ 0+2 & -5+0 & 1-2 & -1-3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Множење скаларом (бројем), $k \in \mathbb{R}$, уводимо на следећи начин:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Пример 1.19.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-5) & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 12 & -15 & 18 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Матрица чији су сви елементи 0 назива се *нула–матрица* и означавамо је са O, и за сваку матрицу X истог облика као и O важи

$$X + O = O + X = X.$$

Супротна матрица је матрица $-A = (-1) \cdot A$. Такође *одузимање матрица* можемо увести као $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Производ матрица A и B је дефинисан само ако је матрица A облика $m \times p$, B облика $p \times n$ и тада је матрица $C = A \cdot B$ облика $m \times n$. Елементи матрице C су дати као

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},$$

тј. да бисмо добили елемент c_{ij}, који се налази на месту (i, j) у производу матрица A и B, множимо одговарајуће елементе i–те врсте матрице A и елементе j–те колоне матрице B: a_{i1} са $b_{1j}, \ldots, a_{ip}$ са b_{1p} и онда саберемо све те производе.

У општем случају ако постоји производ $A \cdot B$ не мора да постоји и производ $B \cdot A$. Оба производа постоје ако и само ако су матрице A и B величине $m \times n$ и $n \times m$. Ако су матрице A и B квадратне, тј. димензије $n \times n$ онда су и производи $A \cdot B$ и $B \cdot A$ исто облика $n \times n$ и тада има смисла говорити о једнакости $A \cdot B = B \cdot A$. У случају да важи $A \cdot B = B \cdot A$ кажемо да матрице A и B *комутирају*.

За множење матрица важи *асоцијативност*:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

и како није битно којим редоследом множимо матрице оба ова производа ћемо означавати са $A \cdot B \cdot C$.

Код квадратних матрица елементи са једнаким првим и другим индексом, тј. $a_{11}, \dots, a_{nn}$, образују *главну дијагоналу* (када хоћемо да је истакнемо означаваћемо је црвеном бојом). Збир свих елемената са главне дијагонале матрице A назива се траг матрице, у ознаци $\operatorname{tr} A$ или $\operatorname{tr}(A)$.

Посебан значај има матрица I_n чији су елементи на главној дијагонали једнаки 1, а остали су 0 и она се назива *јединична матрица*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ову матрицу ћемо означавати са I_n само када хоћемо да истакнемо да је то матрица реда n, а иначе ћемо користити ознаку I. У литератури се јавља и ознака E.

Најважније особине јединичне матрице (за произвољне матрице X и Y за које производи постоје) су:

$$X \cdot I = X \qquad \text{и} \qquad I \cdot Y = Y.$$

Квадратна матрица је *горње троугаона* ако су сви елементи испод главне дијагонале једнаки 0, тј. важи $a_{ij} = 0$ ако је $i > j$. Горње троугаона матрица има следећи облик

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Квадратна матрица је *доње троугаона* ако су сви елементи изнад главне дијагонале једнаки 0, тј. важи $a_{ij} = 0$ ако је $i < j$. Доње троугаона матрица има следећи облик

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица је *троугаона* ако је горње троугаона или доње троугаона. Матрица може бити истовремено и горње троугаона и доње троугаона ако је *дијагонална*, тј. ако су јој сви елементи различити од 0 на главној дијагонали — нпр. једна таква матрица је јединична матрица, I).

За транспоноване матрице важи $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

Квадратна матрица је *ортогонална* ако је испуњено $A^{\mathrm{T}} \cdot A = I$.

Инверзна матрица квадратне матрице A, у ознаци A^{-1}, је матрица за коју важи да је $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

Теорема 1.5. Ако постоји инверзна матрица, она је јединствена.

За квадратну матрицу A кажемо да је *регуларна* ако има инверзну матрицу, а *сингуларна* ако нема инверзну матрицу. Инверзну матрицу можемо одредити (погледати Пример 2.21) решавањем n система са n непознатих, помоћу елементарних трансформација врста вршећи прелаз од матрице A и јединичне матрице до јединичне матрице и инверзне матрице[2],тј. $A \mid I \quad \rightsquigarrow \quad I \mid A^{-1}$, или преко адјунговане матрице.

Адјунгована матрица квадратне матрице A је матрица

$$\operatorname{adj} A = ||A_{ij}||^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix},$$

где су A_{ij} одговарајући кофактори (видети страну 8). Најчешће грешке код одређивања адјунговане матрице су да се код кофактора испусти члан $(-1)^{i+j}$, као и да се заборави транспоновање. За адјунговану матрицу матрицу матрице A важи $A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = (\det(A)) \cdot I$, где је I јединична матрица одговарајућег облика $n \times n$ (тј. она је реда n).

Теорема 1.6. Матрица A има инверзну матрицу ако и само ако је њена детерминанта $\det(A) \neq 0$. У случају када постоји инверзна матрица је дата формулом

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj} A.$$

Пример 1.20. Одредити инверзну матрицу од опште матрице облика 2×2, $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$.

Тражимо непознату матрицу $A^{-1} = \begin{Vmatrix} x & y \\ z & w \end{Vmatrix}$, тј. треба да одредимо скаларе x, y, z и w за које важи $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x & y \\ z & w \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Одатле имамо једнакост следеће две матрице $\begin{Vmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

[2] Овај начин тражења инверзне матрице знатно олакшава израчунавања у Операционим истраживањима код симплекс алгоритма.

Добили смо два система са по две непознате:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & bz & = & 1 \\ cx & + & dz & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} ay & + & bw & = & 0 \\ cy & + & dw & = & 1 \end{array}.$$

Без умањења општости можемо узети да је $a \neq 0$ (ако је $a = 0$ само би променили поредак једначина). Када ове системе сведемо на системе у степенастом облику добијамо:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & bz & = & 1 \\ & & \left(d - \dfrac{bc}{a}\right) z & = & -\dfrac{c}{a} \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} ay & + & bw & = & 0 \\ & & \left(d - \dfrac{bc}{a}\right) w & = & 1. \end{array}$$

Да би ова два система имала јединствено решење (на основу Теореме 2.6 инверзна матрица је јединствена) потребно је да важи $d - \dfrac{bc}{a} \neq 0$, односно $ad - bc \neq 0$ (шта је ово?). Тако добијамо да за $ad - bc \neq 0$ системи имају јединствена решења:

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad z = \frac{-c}{ad - bc}, \qquad tj. \qquad y = \frac{-b}{ad - bc}, \quad w = \frac{a}{ad - bc}.$$

Тражена инверзна матрица је

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{Vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{Vmatrix}. \quad \blacksquare$$

Напомена. Приметимо да овде израз $ad - bc$ представља детерминанту дате матрице A, док је $\begin{Vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{Vmatrix}$ је адјунгована матрица дате матрице: $A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b, A_{22} = a$. Тиме смо баш добили формулу из Теореме 2.6.

Пример 1.21. Нека је дата матрица $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Одредити A^{-1}.

I начин (решавањем система).
Као у претходном примеру имамо $A \cdot A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x & u & a \\ y & v & b \\ z & w & c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$,

тј. матричну једнакост $\begin{Vmatrix} x + 2y + 2z & u + 2v + 2w & a + 2b + 2c \\ 3x + y & 3u + v & 3a + b \\ x + y + z & u + v + w & a + b + c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.
Добили смо 3 система са по 3 непознате:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} u & + & 2v & + & 2w & = & 0 \\ 3u & + & v & & & = & 1 \\ u & + & v & + & w & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 2c & = & 0 \\ 3a & + & b & & & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 1 \end{array}$$

који имају следећа решења:

$x = -1,\ y = 3,\ z = -2;\ u = 0,\ v = 1,\ w = -1;\ a = 2,\ b = -6,\ c = 5$, те је $A^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$.

Напомена. Приметимо да су сва 3 система истог облика (разликују им се колоне слободних чланова, док имају исте матрице система, а самим тим и детерминанте система). Овај приступ, заједно са решавањем система преко Крамерових формула (видети страну 17) даје доказ Теореме 2.6.

II начин (елементарним трансформацијама).

Елементарним трансформацијама врста ћемо извршити прелаз од матрице A и јединичне матрице до јединичне матрице и инверзне матрице:

$$A \quad | \quad I \qquad \rightsquigarrow \qquad I \quad | \quad A^{-1}.$$

Са стране су назначене елементарне трансформације које вршимо на врсте (и са леве и са десне стране црте).

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \scriptstyle \mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \scriptstyle \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 & \scriptstyle \mathrm{III}-5\cdot\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & / \cdot(-1) \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -5 & / \cdot(-1) \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \scriptstyle \mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & \scriptstyle \mathrm{II}-\mathrm{III} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{array}.$$

У последњем кораку смо прво рачунали $\mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II}$, па тек онда $\mathrm{II} - \mathrm{III}$.

Тако смо добили инверзну матрицу: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

III начин (преко адјунговане матрице).

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Добијене кофакторе можемо искористити и за одређивање детерминанте $\det(A)$ (Лапласов развој по III колони је најједноставнији јер имамо један члан 0): $\det(A) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = -1$, а на основу њих одређујемо ађунговану матрицу $\operatorname{adj} A$ и инверзну матрицу A^{-1}:

$$\operatorname{adj} A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -5 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -5 \end{Vmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det(A)} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Напомена. Формално, увек треба прво одредити $\det A$, јер ако је $\det A = 0$ онда не постоји инверзна матрица A^{-1} и немамо шта даље да радимо!

Подматрица (или *субматрица*) матрице A се добија од матрице A, тако што се матрици A одбаци неки број врста и/или колона. *Ранг* матрице A,

$r(A)$, је ред њене највеће регуларне квадратне подматрице. Поред ознаке $r(A)$, користе се и $\mathrm{rang}(A)$, као и $\mathrm{rang}\, A$. Ранг нула–матрице је једнак 0, тј. $r(O) = 0$. Ако је матрица A облика $m \times n$ она има $\binom{m}{p} \cdot \binom{n}{p}$ различитих квадратних субатрица реда p, те није практично одређивати ранг на овај начин (по дефиницији), сем за матрице малог формата. Овај метод ћемо илустровати на наредна два примера, а затим ћемо дати практичнији поступак за одређивање ранга матрице — елементарне трансформације којима се не мења ранг.

Пример 1.22. Нека је дата матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Одредимо ранг ове матрице.

Ова матрица има 4 подматрице реда 3 (њих добијамо кад редом избацимо I колону, II колону, III колону и IV колону):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Детерминанте I и III подматрице су једнаке $D_1 = D_3 = 0$ јер оне имају по две пропорционалне колоне (колоне са елементима 1,2,3 и 2,4,6), а добија се и да су $D_2 = D_4 = 0$. Како су све подматрице реда 3 сингуларне, то је ранг $r(A) \neq 3$, тј. $r(A) < 3$.

Уочимо подматрицу $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ реда 2 која се добија од полазне матрице када се избаце III врста и III и IV колона. Њена детерминанта је

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -5 \neq 0,$$

те смо нашли регуларну подматрицу реда 2, а све подматрице већег реда су сингуларне, те је ранг матрице A, $r(A) = 2$. ■

Пример 1.23. Наћи ранг матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & a \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$ у зависности од $a \in \mathbb{R}$.

Подматрица реда 3 је сама та матрица. Како је њена детерминанта

$$\det(A) = a^2 + a^2 + a - a^3 - a - a = -a(a-1)^2,$$

то је за $\boxed{a \neq 0, 1}$ $\det(A) \neq 0$, па је ранг матрице A, $r(A) = 3$. За $\boxed{a = 0}$ матрица се свела (кад свуда заменимо $a = 0$) на матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и њен ранг је $r(A) = 2$, јер је $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, а $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ (подматрица добијена избацивањем треће врсте и колоне). Остаје још случај $\boxed{a = 1}$ и тад је ранг $r(A) = 1$ јер је детерминанта подматрице $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ једнака 1, док је детерминанта сваке подматрице већег реда једнака 0, јер има две исте врсте (са свим елементима 1). ■

Елементарне трансформације матрице су:
1° замена места 2 врсте (или 2 колоне),
2° множење неке врсте (или колоне) бројем $k \neq 0$,
3° додавање елемената једне врсте (или колоне), помножених неким бројем, одговарајућим елементима друге врсте (или колоне).

Елементарне трансформације не мењају ранг матрице, тј. њима се добијају нове матрице које имају исти ранг као и полазна матрица. Да матрице A и B имају исти ранг писаћемо $A \sim B$.

Помоћу елементарних трансформација полазну матрицу сводимо на матрицу у степенастом облику која има k врста код којих сви елементи нису једнаки 0. Тада је $r(A) = k$.

У задацима елементе који су једнаки 0 и који праве „степенице“ представљаћемо плавом бојом.

Пример 1.24. Одредимо ранг матрица из претходна два примера помоћу елементарних трансформација матрице.

За матрицу из Примера 2.22 прво заменимо I и II врсту, затим (ту нову) I врсту додамо на III и двоструку II додамо на III. Онда од III врсте одузмемо II и добили смо матрицу која је ранга 2 (у степанастом је облику и има 2 врсте које немају све елементе 0), те је и $r(A) = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Код матрице из Примера 2.23 од II врсте одузмемо I, а од III одузмемо I помножену са a. На крају смо III врсти додали II и добили смо матрицу B која наликује степенастом облику.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & a \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a(1-a) \end{pmatrix} = B.$$

Сада у зависности од параметра a дискутујемо ранг матрице B (а самим тим и ранг матрице A): за $\boxed{a \neq 0,1}$ је $r(A) = 3$, за $\boxed{a = 0}$ је $r(A) = 2$, док је за $\boxed{a = 1}$ $r(A) = 1$. ■

За векторе $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ кажемо да су *линеарно зависни* ако постоје скалари $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$ такви да важи $k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_m u_m = \vec{0}$ и да нису сви једнаки 0, тј. $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Ако не постоје такви $k_1, k_2, \ldots, k_m$, тј. ако је једино решење одговарајућег хомогеног система $k_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, кажемо да су вектори $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ *линеарно независни*. Другачије речено, вектори су линеарно зависни уколико се један може представити као линеарна комбинација осталих, а ако то не важи онда су линеарно независни.

Теорема 1.7. Ранг матрице A, $r(A)$, је једнак највећем броју линеарно независних врста, односно највећем броју линеарно независних колона.

Пример 1.25. Код матрица из Примера 2.22 имамо да за врсте важи: $\mathrm{I} + \mathrm{II} - \mathrm{III} = 0$, па су оне линеарно зависне. Стога се трећа врста може представити преко прве две:

$$\mathrm{III} = \mathrm{I} + \mathrm{II},$$

а како су прва и друга врста линеарно независне (јер је $\mathrm{I} \neq k \cdot \mathrm{II}$), проверавамо да ова матрица има $r(A) = 2$ линеарно независне врсте.

Може се показати да се било које 2 врсте могу узети за линеарно независне и онда се трећа може изразити преко те две врсте.

За колоне имамо да су II и IV линеарно зависне јер је $\mathrm{IV} = 2 \cdot \mathrm{II}$. Покушајмо да представимо III колону као линеарну комбинацију прве две, тј. потражимо непознате бројеве α и β такве да важи

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ -\alpha + 3\beta \end{pmatrix}.$$

Ова матрична једначина се своди на систем једначина $\begin{array}{rcrcr} -2\alpha & + & \beta & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & = & -1 \\ -\alpha & + & 3\beta & = & -1, \end{array}$

који има јединствено решење $\alpha = -\dfrac{1}{5}$, $\beta = -\dfrac{2}{5}$. Стога за колоне важи:

$$\mathrm{III} = -\frac{1}{5} \cdot \mathrm{I} - \frac{2}{5} \cdot \mathrm{II}, \qquad \mathrm{IV} = 2 \cdot \mathrm{II},$$

и како су прве две колоне линеарно независне (показује се као и за врсте) добијамо да ова матрица има и $r(A) = 2$ линеарно независне колоне. ■

Појам ранга, као и инверзне матрице, налази примену у теорији везаној за решавање система линеарних једначина – видети Кронекер–Капелијеву теорему са стране 18. Ту ћемо, при одређивању ранга, вршити само елементарне трансформације врста.

1.5. Сопствене вредности и вектори

У овом поглављу ћемо користити доста терминологије из Главе 3. Вектори. Сопствене вредности и вектори имају примену код решавања система диференцијалних једначина у предмету Математика 3.

Посматрајмо полином $f(x)$ над пољем K: $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$. Ако је A квадратна матрица, I јединична матрица истог реда, дефинишимо

$$f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Матрица A је *нула* или *корен* полинома $f(t)$ ако је $f(A) = 0$.

Нека је A квадратна матрица реда n над пољем скалара K. Скалар $\lambda \in K$ се назива *сопствена вредност* (или *карактеристична вредност* или *својствена вредност*) ако постоји ненула вектор $v \in K^n$ за који важи

$$Av = \lambda v.$$

Сваки ненула вектор $v \neq \vec{0}$ који задовољава претходну једнакост, назива се *сопствени вектор* (или *карактеристични вектор* или *својствени вектор*) матрице A који одговара сопственој вредности λ, а скуп свих тих вектора заједно са нула-вектором чини *сопствени простор* матрице A који одговара сопственој вредности λ (то је један векторски подпростор векторског простора K^n). Уколико су v_1 и v_2 сопствени вектори који одговарају сопственој вредности λ квадратне матрице A, тада је и њихова произвољна линеарна комбинација такође сопствени вектор који одговара λ (или је нула-вектор). Скуп свих сопствених вредности матрице A назива се *спектар* матрице A.

Пример 1.26. Наћи сопствене вредности и векторе матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Тражимо скаларе λ и ненула векторе $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ тако да је $Av = \lambda v$, односно да важи $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Претходна матрична једначина је еквивалентна систему $\begin{array}{rcl} x + 2y & = & \lambda x \\ 3x + 2y & = & \lambda y \end{array}$ односно хомогеном систему

$$\begin{array}{rcrcl} (1-\lambda)x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \end{array}.$$

Како хомоген систем има нетривијалних решења ако и само ако му је детерминанта система једнака 0:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 2\cdot 3 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) = 0,$$

па је λ сопствена вредност матрице A ако и само ако је $\lambda_1 = 4$ или $\lambda_2 = -1$.

За $\lambda_1 = 4$ сопствене векторе тражимо из једнакости $(A - 4I)v = O$, где је X непознати вектор $v = \binom{x}{y}$. То је исто као да се замени $\lambda_1 = 4$ у горњи хомоген систем и тада добијамо систем

$$\begin{array}{rcrl} -3x & + & 2y & = 0 \\ 3x & - & 2y & = 0, \end{array}$$

који има решење $x = 2t$, $y = 3t$, $t \in \mathbb{R}$, односно сопствени вектори који одговарају сопственој вредности $\lambda_1 = 4$ сви вектори v облика $v_1 = t\binom{2}{3}$, где је $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Одговарајући сопствени простор је $\mathcal{L}(\{\binom{2}{3}\})$ (овде $\mathcal{L}$ означава линеал над скупом вектора).

Слично, за $\lambda_2 = -1$ сопствене векторе добијамо из $\big(A-(-1)I\big)v = O$, тј. одговарајућег хомогеног система

$$\begin{array}{rcrl} 2x & + & 2y & = 0 \\ 3x & + & 3y & = 0, \end{array}$$

који има решење $x = -t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, односно одговарајући сопствени вектор је $v_2 = t\binom{-1}{1}$, где је $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

Теорема 1.8. Сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима су линеарно независни.

За матрице A и B кажемо да су *сличне*, са ознаком $A \sim B$, ако постоји регуларна матрица P (матрица P има инверзну матрицу P^{-1}) таква да је

$$B = P^{-1}AP$$

(тај услов је еквивалентан са $A = PBP^{-1}$).

Матрица P назива се *матрица сличности* за матрице A и B.

За матрицу кажемо да је *дијагонализабилна* ако је слична са неком дијагоналном матрицом.

Теорема 1.9. Квадратна матрица A реда n је слична дијагоналној матрици D ако и само ако има n линеарно независних сопствених вектора. Дијагонални елементи матрице D су одговарајуће сопствене вредности.

Пример 1.27. Да ли је матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ дијагонализабилна?

Како матрица A има 2 различите сопствене вредности, $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$, по Теореми 8 сопствени вектори $v_1 = \binom{2}{3}$ и $v_2 = \binom{-1}{1}$ су линеарно независни, што можемо проверити и на основу дефиниције линеарне независности.

Даље, по Теореми 2.9 добијамо да је матрица A дијагонализабилна. Матрицу P (која одређује сличност матрица) добијамо тако што су јој колоне одговарајући независни сопствени вектори матрице A. Зато је $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Њена инверзна матрица (искористимо Пример 2.20) је $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. Матрица A је слична дијагоналној матрици

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

те смо добили да је матрица A дијагонализабилна.

Као што се могло и очекивати, елементи 4 и -1, који су на дијагонали дијагоналне матрице D, баш су сопствене вредности матрице A, којима одговарају сопствени вектори $\binom{2}{3}$ и $\binom{1}{-1}$. ■

Полином по λ дат са

$$k(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

где је I је јединична матрица истог реда као и матрица A, назива се *карактеристични полином* матрице A. До овог појма се природно долази поопштењем разматрања из Примера 2.26 (опет разматрамо хомоген систем чија је детерминанта баш карактеристични полином и тај систем ће имати нетривијална решења, сопствене векторе, само кад је та детерминанта једнака 0). Понегде у литератури се карактеристични полином уводи и као $\det(\lambda I - A)$, али та разлика није уопште значајна, јер ћемо тражити нуле карактеристичног полинома (Теорема 11 каже да су то баш сопствене вредности дате матрице).

Теорема 1.10. **Кејли–Хамилтонова теорема.**
Свака матрица A је нула свог карактеристичног полинома, $k(\lambda)$, тј. важи $k(A) = O$, где је O нула–матрица истог реда као и A.

Теорема 1.11. Нека је A квадратна матрица реда n над пољем K. Скалар λ је сопствена вредност матрице A ако и само ако је λ корен карактеристичног полинома.

Теорема 1.12. Сличне матрице имају једнаке карактеристичне полиноме.

Обрат овог тврђења не важи! Матрице A и B могу имати идентичне карактеристичне полиноме, али то не повлачи да су сличне; нпр. матрице $A = I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и $B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ имају једнаке карактеристичне полиноме $k(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, али нису сличне: ако је X произвољна регуларна матрица другог реда, тада је $X^{-1}AX = X^{-1}IX = I \neq B$.

Пример 1.28. Карактеристични полином матрице $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$ је

$$k(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1).$$

Одавде се добија да су сопствене вредности матрице A једнаке $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$ (што смо добили и у Примеру 26). Такође, као што вели Кејли–Хамилтонова теорема, матрица A је нула свог карактеристичног полинома:

$$k(A) = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}^2 - 3\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} - 4\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

■

Пример 1.29. Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.
Да ли је она дијагонализабилна над пољем $\mathbb{R}$? А над пољем $\mathbb{C}$?
Карактеристични полином матрице A је

$$k(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda^2 + 1).$$

Имамо два случаја:

1° матрица A је матрица над реалним пољем $\mathbb{R}$. Тада A има само једну сопствену вредност $\lambda = 3$. Како за $\lambda = 3$ има само један независтан сопствени вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, A није дијагонализабилна над пољем реалних бројева.

2° матрица A је над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$. Тада A има три различите сопствене вредности $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = i$ и $\lambda_3 = -i$, па постоји матрица $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2-i & 2+i \end{bmatrix}$ ($i^2 = -1$, а колоне матрице P су сопствени вектори који одговарају сопственим вредностима 3, i и $-i$) тако да је матрица

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2i}{10} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1+2i}{10} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2-i & 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

дијагонална, те је над пољем $\mathbb{C}$ матрица A дијагонализабилна. ■

Монични полином (најстарији коефицијент му је 1) најнижег степена такав да је $m(A) = 0$ назива се *минимални полином*. *Алгебарска вишеструкост* (или *мултиплицитет*) сопствене вредности $\lambda \in K$ матрице A дефинишемо као вишеструкост λ као корена карактеристичног полинома матрице A. *Геометријска вишеструкост* (или *мултиплицитет*) сопствене вредности $\lambda \in K$ матрице A дефинишемо као димензију одговарајућег сопственог простора. Може се показати да је геометријска вишеструкост увек мања или једнака од алгебарске вишеструкости неке сопствене вредности.

Теорема 1.13. Минимални полином дели карактеристични полином матрице A и они имају исте иредуцибилне факторе, тј. ако је

$$k(t) = (t-a_1)^{b_1} \dots (t-a_r)^{b_r}, \quad (b_i \geqslant 1), \quad \text{онда је} \quad m(t) = (t-a_1)^{c_1} \dots (t-a_r)^{c_r},$$

где су коефицијенти c_i између 1 и b_i, тј. $1 \leqslant c_i \leqslant b_i$.

Пример 1.30. Одредимо минимални полином матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Карактеристични полином матрице A је $k(t) = (t-2)^3(t-5)$. Према претходној теореми иредуцибилни фактори $t-2$ и $t-5$ морају бити и фактори минималног полинома и како $m(t) \mid k(t)$, добијамо да је минимални полином један од следећа три полинома:

$$m_1(t) = (t-2)(t-5), \qquad m_2(t) = (t-2)^2(t-5), \qquad m_3(t) = (t-2)^3(t-5).$$

Према Кејли–Хамилтоновој теореми имамо да је $m_3(A) = k(A) = O$, па је за одређивање минималног полинома потребно проверити да ли можда важи $m_1(A) = O$ или $m_2(A) = O$.

$$m_1(A) = (A-2I)(A-5I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

те је $m_1(A) \neq O$, тј. m_1 није минимални полином матрице A.

$$m_2(A) = (A-2I)^2(A-5I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O,$$

па је $m_2(t) = (t-2)^2(t-5)$ минимални полином матрице A.

Сопствени простор који одговара сопственој вредности $t_1 = 2$ чине сви вектори облика $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$, где x и z узимају произвољне вредности, тј. тај сопствени простор је $\mathcal{L}(\{e_1, e_3\})$. Слично се добија да је сопствени простор који одговара сопственој вредности $t_2 = 5$ једнак $\mathcal{L}(\{e_4\})$ (вектори e_1, e_2, e_3, e_4 чине стандардну базу векторског простора $\mathbb{R}^4$). На основу свега претходног следи да је алгебарска вишеструкост сопствене вредности $t_1 = 2$ једнака 3, а геометријска 2, док је за сопствену вредности $t_2 = 5$ и алгебарска и геометријска вишеструкост једнака 1. ■

Теорема 1.14. Сличне матрице имају једнаке минималне полиноме.

Опет не важи обрат овог тврђења.

Минимални полиноми се користе за одређивање степена матрице A, A^n. Помоћу њих добијамо рекурентну везу за матрице различитих степена, помоћу које можемо наћи A^n. То ће илустровати последња 2 начина у следећем примеру.

Пример 1.31. Одредити $A^n = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}^n$.

У Примеру 2.28 смо одредили карактеристични полином матрице A, $k(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$.

Даље ћемо радити на 3 различита начина, прво коришћењем сопствених вредности и вектора и свођењем на дијагоналну матрицу, а затим следе остала 2 начина који укључују решавање рекурентних једначина.

I начин.

У Примеру 2.27 смо добили да је $D = P^{-1}AP$. Ако ову матричну једнакост помножимо са матрицом P са леве стране и са матрицом P^{-1} са десне, добијамо да је $PDP^{-1} = A$, односно $A = PDP^{-1}$. Степеновањем претходне једнакости и коришћењем асоцијативности множења матрица и чињеница $P^{-1}P = I$, као и $XI = X$, добијамо

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} = PDIDI \cdot \ldots \cdot IDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Како је $D^n = \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{Vmatrix}$ (ово се најбрже показује помоћу Принципа математичке индукције), добијамо да је тражена матрица A^n једнака

$$A^n = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 2 \cdot 4^n + 3 \cdot (-1)^n & 2 \cdot 4^n - 2 \cdot (-1)^n \\ 3 \cdot 4^n - 3 \cdot (-1)^n & 3 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n \end{Vmatrix}.$$

II начин.

На основу Теореме 13 имамо да је и минимални полином

$$m(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 3\lambda - 4.$$

Па како је $m(A) = 0$ добијамо $A^2 - 3A - 4I = 0$, односно

$$A^2 = 3A + 4I. \tag{$*$}$$

Ако претходну једнакости помножимо матрицом A добијамо

$$A^3 = 3A^2 + 4A = 3(3A + 4I) + 4A = 13A + 12I.$$

Множећи даље ову једнакост са A, добијамо да се и A^4 може представити као линеарна комбинација матрица A и I, и настављајући овај поступак долазимо до тога да се свака матрица A^n може представити у облику

$$A^n = a_n A + b_n I.$$

Ако ову једначину помножимо са A добијамо $A^{n+1} = (3a_n + b_n)A + 4a_n I$. Како је $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I$, добијамо систем рекурентних једначина

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n, \qquad b_{n+1} = 4a_n.$$

Ако помоћу друге једначине елиминишемо b_n из прве једначине добијамо линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима

$$a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1}.$$

Њена карактеристична једначина је $t^2 - 3t - 4 = 0$, а то је баш минимални полином. Његове нуле су сопствене вредности $t_1 = 4$ и $t_2 = -1$, па је опште решење за a_n дато са

$$a_n = c_1 4^n + c_2(-1)^n,$$

где непознате константе c_1 и c_2 одређујемо из почетних услова:

$$A^0 = 0 \cdot A + 1 \cdot I \text{ и } A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I \Rightarrow a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Као решење овог система $\begin{array}{ccccccccc} a_0 & = & 0 & = & c_1 4^0 & + & c_2(-1)^0 & = & c_1 + c_2, \\ a_1 & = & 1 & = & c_1 4^1 & + & c_2(-1)^1 & = & 4c_1 - c_2 \end{array}$ добијамо да је $c_1 = \frac{1}{5}$ и $c_2 = -\frac{1}{5}$, што кад уврстимо у претходне једначине даје решење линеарне рекурентне једначине $a_n = \dfrac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}$.

Како је $b_{n+1} = 4a_n$ имамо да је $b_n = 4a_{n-1} = \dfrac{4^n + 4(-1)^n}{5}$.

Одатле добијамо да је

$$A^n = a_n A + b_n I = \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} + \frac{4^n + 4(-1)^n}{5} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

односно $A^n = \begin{Vmatrix} \frac{2}{5} \cdot 4^n + \frac{3}{5} \cdot (-1)^n & \frac{2}{5} \cdot 4^n - \frac{2}{5} \cdot (-1)^n \\ \frac{3}{5} \cdot 4^n - \frac{3}{5} \cdot (-1)^n & \frac{3}{5} \cdot 4^n + \frac{2}{5} \cdot (-1)^n \end{Vmatrix}$.

III начин.

Слично као у претходном начину долазимо до једначине $(*)$, коју ћемо помножити са A^n и добијамо $A^{n+2} = 3A^{n+1} + 4A^n$. Ово решавамо као рекурентну једначину, где су почетни услови $A^0 = I, A^1 = A$. Карактеристична једначина опет одговара минималном полиному, а њене нуле су сопствене вредности $t_1 = 4$ и $t_2 = -1$. Опште решење је

$$A^n = C_1 4^n + C_2(-1)^n,$$

само су сада константе C_1 и C_2 матрице облика 2×2. За $n = 0$ је $I = C_1 + C_2$, а за $n = 1$ је $A = 4C_1 - C_2$. Из тог система добијамо $C_1 = \frac{1}{5}(I + A) = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix}$ и $C_2 = \frac{1}{5}(4I - A) = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}$, па је $A^n = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix} 4^n + \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix} (-1)^n$, или коначно $A^n = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 2\cdot 4^n + 3\cdot(-1)^n & 2\cdot 4^n - 2\cdot(-1)^n \\ 3\cdot 4^n - 3\cdot(-1)^n & 3\cdot 4^n + 2\cdot(-1)^n \end{Vmatrix}$, што је резултат који смо добили и претходним начинима. ■

Напомена. Постоји и обрнута веза система линеарних рекурентих једначина са константним коефицијентима и матрице A^n. Дати систем се може записати у матричном облику

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ \vdots \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_n + a_{12}y_n + a_{13}z_n + \ldots + a_{1s}w_n \\ a_{21}x_n + a_{22}y_n + a_{23}z_n + \ldots + a_{2s}w_n \\ a_{31}x_n + a_{32}y_n + a_{33}z_n + \ldots + a_{3s}w_n \\ \vdots \\ a_{s1}x_n + a_{s2}y_n + a_{s3}z_n + \ldots + a_{ss}w_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

где је матрица $A = [a_{ij}]_{s\times s}$. Тада је опште решење овог система једнако

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \vdots \\ w_0 \end{bmatrix},$$

те смо решавање овог система свели на степеновање матрице система, A.